L'insieme dei punti del piano (proiettivo, affine o euclideo) che soddisfano ad un'equazione

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

dove F è una funzione continua si chiama curva e la (1) dicesi *equazione* della curva.

La (1) si suppone risolubile rispetto ad una delle variabili, ad esempio rispetto alla y. La (1) può allora scriversi

$$y = f(x) \tag{2}$$

che si chiama *forma esplicita* dell'equazione della curva.

Parlando di punti si sono intesi punti reali ma, accanto ai punti reali della curva di equazione (1), si possono considerare anche punti immaginari che soddisfano la (1). Anzi, data un'equazione del tipo (1), può anche darsi che esistano soltanto punti immaginari della curva relativa. Così avviene, ad esempio, per la curva di equazione $x^2 + y^2 = -1$.

Se il piano è euclideo, le x, y si supporranno generalmente coordinate cartesiane e la (1) si dirà allora *equazione cartesiana* della curva, ma potranno anche essere coordinate polari e la (1) si dirà allora *equazione polare* della curva.

Nel piano affine si ha:

Se nell'equazione $f(x, y) = 0$ *di una curva il primo membro* $f(x, y)$ *è una funzione omogenea nelle variabili, la curva è costituita di rette uscenti dall'origine.*

Nel piano affine osserviamo ancora:

Se l'equazione di una curva contiene una sola delle variabili (ad esempio x*), la curva è costituita di rette parallele all'asse* y.

Sia infatti

$$f(x) = 0$$

l'equazione della curva. Se un punto $P_0(x_0, y_0)$ appartiene alla curva si ha $f(x_0) = 0$, e quindi alla curva appartengono pure tutti i punti $P(x_0, y)$ appartenenti alla parallela all'asse y passante per P_0; la curva è perciò costituita di rette parallele all'asse y.

Nel piano euclideo si ha infine:

Se l'equazione cartesiana di una curva non si altera cambiando x *in* — x, *la curva è simmetrica rispetto all'asse* y, *nella direzione dell'altro asse (quindi in simmetria ortogonale od obliqua secondo che gli assi cartesiani sono ortogonali o no)* .

Segue che, *se l'equazione cartesiana di una curva non si altera nè cambiando* x *in* — x, *nè cambiando* y *in* — y, *la curva ha negli assi coordinati due assi di simmetria e nell'origine un centro di simmetria.*

92. — Curve algebriche e trascendenti.

Le curve del piano (proiettivo, affine, euclideo) si dividono in due grandi classi: *algebriche e trascendenti.*

Una curva si dice *algebrica* quando nella sua equazione

$$f(x, y) = 0,$$

$f(x, y)$ è un polinomio in x, y .

Le curve non algebriche si dicono *trascendenti.*

La classe delle curve algebriche è molto più ristretta di quella delle curve trascendenti. Tuttavia, le curve algebriche hanno notevole interesse anche perchè il loro studio è utile anche in molte questioni sulle curve trascendenti. Lo studio delle curve algebriche, e più in generale degli enti algebrici, è stato ed è coltivato con particolare interesse in Italia.

Se il polinomio $f(x, y)$ è il prodotto di altri polinomi $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y), \ldots$ le coordinate di un punto della curva, annullando f, annullano uno almeno dei polinomi φ, $\psi, \ldots,$ e inversamente.

Si conclude:

La curva algebrica di equazione $\varphi \cdot \psi \ldots = 0$ *si compone delle curve (algebriche) di equazioni* $\varphi = 0$, $\psi = 0, \ldots$

In questo caso la curva, come il primo membro della sua equazione si dice *riducibile.* Nel caso contrario: *irriducibile.* Una coppia di rette porge un esempio di curva (algebrica) riducibile.

Si ha poi dall'algebra:

Affinchè due polinomi irriducibili nelle coordinate x, y, *uguagliati a zero, siano le equazioni di una stessa curva (algebrica) è necessario e sufficiente che differiscano per un fattore costante.*

Se $f(x, y) = 0$ è l'equazione di una curva algebrica, il grado del polinomio $f(x, y)$ si dice *ordine* della curva.

Le curve algebriche di primo ordine sono quindi le rette; le curve algebriche di secondo ordine si dicono *coniche.* Dal punto di vista della geometria affine (e quindi anche da quella euclidea), le coniche irriducibili si distinguono in *ellissi*, *iperboli*, *parabole* (Parte IV). Nella geometria euclidea fra le ellissi si hanno le *circonferenze.*
Una coppia di rette è una conica riducibile.

Per avere anche i punti impropri di una curva occorre introdurre coordinate omogenee x_1, x_2, x_3. Se la curva è algebrica d'ordine n, ponendo nella sua equazione $f(x, y) = 0$, $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ e moltiplicando per x_3^n, si ottiene

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{5}$$

dove il primo membro è un polinomio omogeneo di grado n nelle variabili.

Le terne x_1, x_2, x_3 che soddisfano la (5) danno le coordinate dei punti delle curva; in particolare, le terne $x_1, x_2, 0$ che soddisfano la (5) porgono i punti impropri della curva. Inversamente dall'equazione (5) della curva in coordinate omogenee si ritorna all'equazione $f(x, y) = 0$ ponendo per x_1, x_2 le x, y e $x_3 = 1$.

Riguardo all'ordine di una curva algebrica, si ha:

Una curva piana algebrica d'ordine n *è incontrata da ogni retta del piano, che non ne faccia parte, in* n *punti (reali o immaginari, propri o impropri, distinti o coincidenti).*

93. Punti intersezione di due curve.

I punti comuni a due curve si chiamano anche punti *intersezione* delle due curve.

Se (nel piano proiettivo, affine, euclideo) le equazioni delle due curve sono

$$(7) \qquad f(x, y) = 0 \quad , \quad \varphi(x, y) = 0 \, ,$$

le coordinate dei punti intersezione delle due curve sono date dalle soluzioni comuni alle equazioni (7), ossia dalle soluzioni del sistema formato dalle (7).

Se le curve sono algebriche, dall'algebra si ha il teorema di Bézout :

Due curve piane algebriche senza parti comuni e di ordini m, n, *s'intersecano in* m · n *punti (reali o immaginari, propri o impropri, distinti o coincidenti).*

94. — Sistemi di curve.

Consideriamo (nel piano proiettivo, affine, euclideo) un'equazione tra le coordinate x, y, e supponiamo che nei coefficienti di essa compaia una variabile u (parametro) indipendente dalle x, y.

Per mettere in evidenza la presenza di u nell'equazione, scriveremo questa

$$f(x\,;\,y\,;\,u) = 0 \tag{8}$$

Se si attribuisce ad u un valore particolare u_1, la (8) rappresenta una curva ben determinata. Dando ad u un altro valore u_2, si ottiene una seconda curva, e così di seguito.

L'insieme delle curve che si ottengono dalla (8) al variare di u si dice *sistema* o anche *famiglia* di curve.

In particolare, se f è un polinomio di grado n in x, y ed è lineare in u, il sistema dicesi *fascio di curve* (*algebriche*) *d'ordine* n. Allora, separando i termini contenenti u (come fattore) dai termini che non contengono u, la (8) può scriversi

$$\varphi(x\,,y) + u\psi(x\,,y) = 0 \tag{9}$$

ed è una combinazione lineare delle equazioni algebriche $\varphi(x\,,y) = 0$, $\psi(x\,,y) = 0$ che si ottengono dalla (9) rispettivamente per $u = 0$ e $u = \pm\infty$.

Per $n = 2$ si hanno i fasci di coniche

95. — Curva luogo dei punti comuni a curve corrispondenti di due sistemi.

Consideriamo due sistemi di curve

$$\varphi_1(x, y; u) = 0, \qquad \varphi_2(x, y; u) = 0 \tag{10}$$

le cui equazioni contengono il medesimo parametro u.

Diciamo corrispondenti due curve dei sistemi dati, relative ad uno stesso valore di u e consideriamo i punti intersezione di due curve corrispondenti (n. 93). Al variare di u in modo continuo, variano (almeno nei casi più comuni) con continuità anche quei punti e generano una curva: *insieme dei punti comuni a due curve corrispondenti dei dati sistemi.*

Vediamo ora come si ottiene l'equazione

$$f(x, y) = 0 \tag{11}$$

di questa curva $\mathcal{C}$.

L'equazione della curva insieme dei punti intersezione di curve corrispondenti dei sistemi (10), *si ottiene eliminando il parametro* u *fra le* (10) *stesse.*

L'analisi studia le possibilità di tale eliminazione e i metodi per attuarla. Quando le equazioni (10) sono algebriche in u, com'è noto dall'algebra, l'eliminazione di u non offre difficoltà.

96. — Equazioni parametriche di una curva.

In molte questioni, anzichè avere l'equazione (1) di una curva si hanno le x, y espresse mediante funzioni (ad un sol valore) di una variabile ausiliaria (*parametro*) u, si ha cioè

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u) \tag{14}$$

Allora, ad ogni valore di u, compreso nell'intervallo in cui sono definite le funzioni f, φ, corrisponde un punto (x, y) del piano; e quando tali funzioni siano continue, variando u con continuità, il punto genera una curva, della quale le (14) sono le *equazioni parametriche*.

Si noti che, data l'equazione (1) di una curva, non sono individuate le equazioni parametriche di essa. Al contrario una curva ammette infinite rappresentazioni parametriche, in corrispondenza alle infinite scelte che si possono fare del parametro.

La prima delle (14) rappresenta un sistema di rette parallele all'asse y, le singole rette del sistema si ottengono dando al parametro u particolari valori; analogamente la seconda delle (14) rappresenta un sistema di rette parallele all'asse x. La curva rappresentata dalle equazioni parametriche (14) è quindi il luogo dei punti intersezione di rette corrispondenti dei due sistemi, chiamando corrispondenti rette relative ad uno stesso valore del parametro u.

Si ha quindi (n. 95):

L'equazione del tipo (1) *della curva si ottiene dalle equazioni parametriche* (14) *eliminando fra di esse il parametro* u.

97. — Equazioni parametriche generalizzate di una curva.

Accanto alle equazioni parametriche di una curva considerate nel n. 96, e che si diranno *ordinarie*, si hanno altre equazioni parametriche di una curva.

Così le (10) costituiscono equazioni parametriche, che diremo *generalizzate*, della curva insieme dei punti comuni alle curve corrispondenti dei due sistemi.

Le equazioni parametriche ordinarie rientrano nelle (10). Come si è già osservato, si hanno le equazioni parametriche ordinarie quando le

curve dei due sistemi sono rispettivamente rette parallele all'asse $x = 0$ e all'asse $y = 0$.

98. — Tangente e normale ad una curva in un punto.

Dicesi *tangente* ad una curva piana in un punto P, la posizione limite t della retta che congiunge P ad un punto P_1, il quale appartenendo alla curva tenda a P [1]; P dicesi il *punto di contatto*.

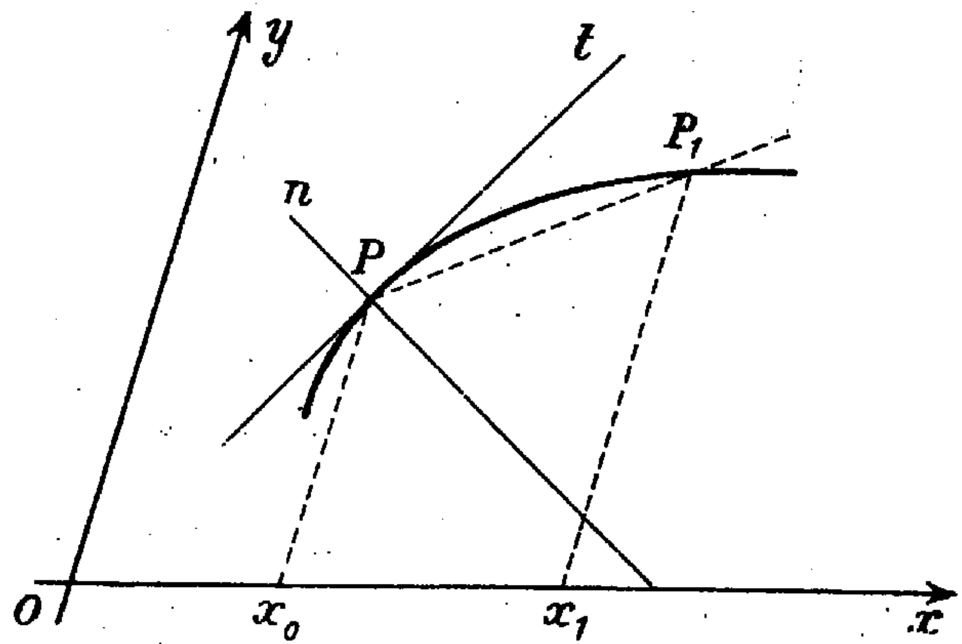

Fig. 20.

Nel piano affine, sia $y = f(x)$ l'equazione della curva, siano x_0, y_0 le coordinate di P e x_1, y_1 quelle del punto P_1 (fig. 20). L'equazione della retta PP_1 sarà pertanto

---

[1] S'intende nell'ipotesi che tale posizione limite esista e sia indipendente dal modo con cui P_1 tende a P.

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) . \tag{17}$$

Supposto che la funzione $f(x)$ sia derivabile per $x = x_0$, quando x_1 tende ad x_0, P_1 tende a P [perchè la $f(x)$, avendo derivata finita, è continua per $x = x_0$] e il rapporto direttivo della (17), cioè $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, tende alla derivata $f'(x_0)$. La retta PP_1 tenderà quindi a quella retta ben determinata, passante per P, che ha per rapporto direttivo $f'(x_0)$ e per equazione

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) . \tag{18}$$

In conclusione:

Se f (x) *è una funzione derivabile per* $x = x_0$, *la curva di equazione* $y = f(x)$ *ammette tangente nel punto* P *di coordinate* x_0, $y_0 = f(x_0)$, *ed il rapporto direttivo della tangente è il corrispondente valore della derivata. L'equazione della tangente è quindi la* (18).

Nel piano euclideo, *se gli assi cartesiani sono ortogonali, la derivata* $f'(x_0)$ *è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo che l'asse* x *forma con la tangente alla curva nel punto di coordinate* $x_0, y_0 = f(x_0)$.

Si chiama *normale* ad una curva piana in un suo punto P, la perpendicolare n in quel punto alla tangente alla curva in P.

Ricordando la condizione di perpendicolarità di due rette (n. 66), si ha subito che, l'equazione della normale alla curva $y = f(x)$ nel suo punto $P(x_0, y_0)$ è

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0 .$$

Nel piano affine, quando l'equazione della curva è

$$f(x, y) = 0,$$

l'equazione della tangente alla curva nel punto (x_0, y_0) è

$$(x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) = 0, \tag{19}$$

dove f'_x, f'_y sono le derivate parziali, l'una rispetto ad x e l'altra rispetto ad y, della $f(x, y)$ calcolate per $x = x_0$, $y = y_0$ [1].

La retta tangente nel punto (x_0, y_0) è determinata quando in x_0, y_0 le derivate parziali f'_x, f'_y non sono entrambe nulle e allora si dice che (x_0, y_0) è un punto *semplice* della curva.

Quando in x_0, y_0 si ha $f'_x = f'_y = 0$, la tangente è *indeterminata* e il punto (x_0, y_0) dicesi *multiplo*.

---

(1) Dalla (18) si perviene alla (19) tenendo presente che $f(x, y) = 0$ definisce la y come funzione $F(x)$ della x e che si ha $F'(x_0) = -\dfrac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$, $y_0 = F(x_0)$.

Se la curva è algebrica e, in coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, ha l'equazione

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0\ ,$$

dove f è un polinomio omogeneo (di grado n) in x_1, x_2, x_3, la tangente alla curva nel punto $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ è

$$x_1 f'_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + x_2 f'_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + x_3 f'_{x_3}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0\ , \tag{20}$$

dove f'_{x_1}, f'_{x_2}, f'_{x_3} sono le derivate parziali (la prima risp. ad x_1, la seconda risp. ad x_2, la terza risp. ad x_3) della f calcolate per $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$, $x_3 = \bar{x}_3$ [1].

---

[1] Dalla relazione di EULERO [L. EULER (EULERO) matematico svizzero (1707-1783)]

$$nf(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1 f'_{x_1}(x_1, x_2, x_3) + x_2 f'_{x_2}(x_1, x_2, x_3) + x_3 f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3)\ ,$$

essendo $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ un punto della curva, segue

$$\bar{x}_1 f'_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + \bar{x}_2 f'_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + \bar{x}_3 f'_{x_3}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = nf(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 0\ .$$

Tenendo conto di questa relazione, posto $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, $\bar{x}_1 = x_0$, $\bar{x}_2 = y_0$, $\bar{x}_3 = 1$, la (20) coincide con la (19).

Nel piano proiettivo, si abbia una curva di equazioni parametriche (n. 96)

$$x_1 = f_1(u)\,, \quad x_2 = f_2(u)\,, \quad x_3 = f_3(u)$$

e sia $\overline{P}$ un punto della curva relativo al valore $\overline{u}$ del parametro. Si chiama *punto derivato primo* relativo al punto $\overline{P}$ il punto di coordinate $f_1'(\overline{u})$, $f_2'(\overline{u})$, $f_3'(\overline{u})$ le cui coordinate sono cioè le derivate rispettivamente di f_1, f_2, f_3 calcolate per $u = \overline{u}$, supposte esistenti, finite e non tutte nulle. Orbene, *la tangente in* $\overline{\mathrm{P}}$ *alla curva si può anche definire come la retta individuata dal punto* $\overline{\mathrm{P}}$ *e dal punto derivato primo*. Essa ha quindi l'equazione

$$\text{(21)} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f_1(\overline{u}) & f_2(\overline{u}) & f_3(\overline{u}) \\ f_1'(\overline{u}) & f_2'(\overline{u}) & f_3'(\overline{u}) \end{vmatrix} = 0\,.$$

In particolare il punto $\overline{P}$ può essere improprio: la tangente alla curva in un punto improprio dicesi anche *asintoto.*

Posto $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, $f_1 = f$, $f_2 = \varphi$, $f_3 = 1$ dalla (21) segue che la tangente alla curva $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$ nel punto $\overline{P}$ relativo al valore $\overline{u}$ del parametro è

$$\frac{x - f(\overline{u})}{f'(\overline{u})} = \frac{y - \varphi(\overline{u})}{\varphi'(\overline{u})} \text{ [2]}\,.$$

Nel piano euclideo, si chiama *spirale di Archimede* la curva di equazione

$$\rho = a\sigma$$

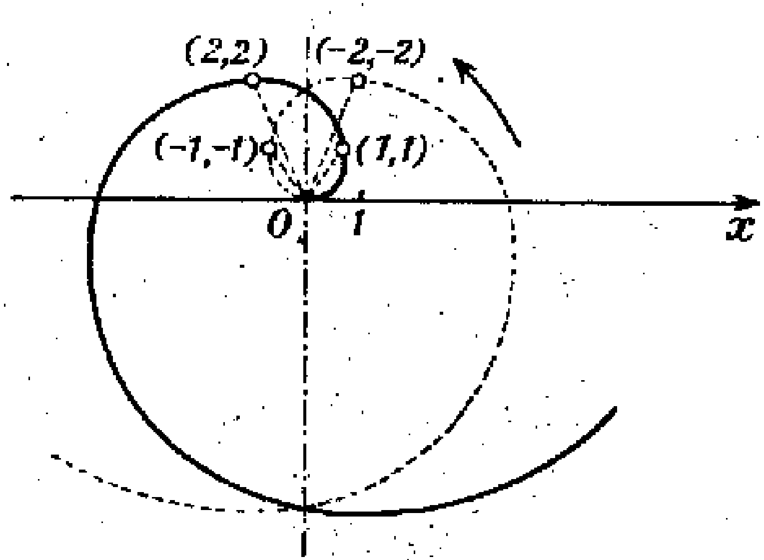

Fig. 37.

essendo ρ, σ coordinate polari generalizzate (n. 83) e a una costante reale (che supponiamo > 0).

Per $\sigma = 0$ si ha $\rho = 0$ e quindi la curva passa per il polo O (fig. 37). Al crescere di σ da 0 a $+\infty$, ρ cresce proporzionalmente. Una semiretta per O incontra la curva in infiniti punti di cui due successivi distano di $2a\pi$ e ciò prova che la curva è trascendente. La spirale parte dunque, per così dire, da O e se ne allontana indefinitamente facendo attorno ad O un numero infinito di giri. Quando σ assume valori negativi variando da 0 a $-\infty$, si ha l'altro ramo di curva simmetrico del precedente (in simmetria ortogonale), rispetto alla perpendicolare in O allo asse polare (*asse* della spirale). Nella figura, questo secondo ramo della curva è tratteggiato ed è $a = 1$.

È una spirale d'Archimede la curva descritta da un punto che si muove di moto uniforme sopra una retta la quale si muove nello stesso tempo di moto uniforme intorno ad un punto O.

115. — Le cicloidi della retta.

Nel piano euclideo, si chiama *cicloide della retta* la curva di equazioni parametriche

$$x = ru - d \operatorname{sen} u\,, \quad y = r - d \cos u\,, \tag{22}$$

dove u è il parametro e r, d sono costanti reali > 0.

La cicloide dicesi *ordinaria*, *accorciata* o *allungata* secondo che $r = d$, $r > d$, $r < d$. Nella fig. 39 la cicloide a cui appartiene il punto P_1 è or-

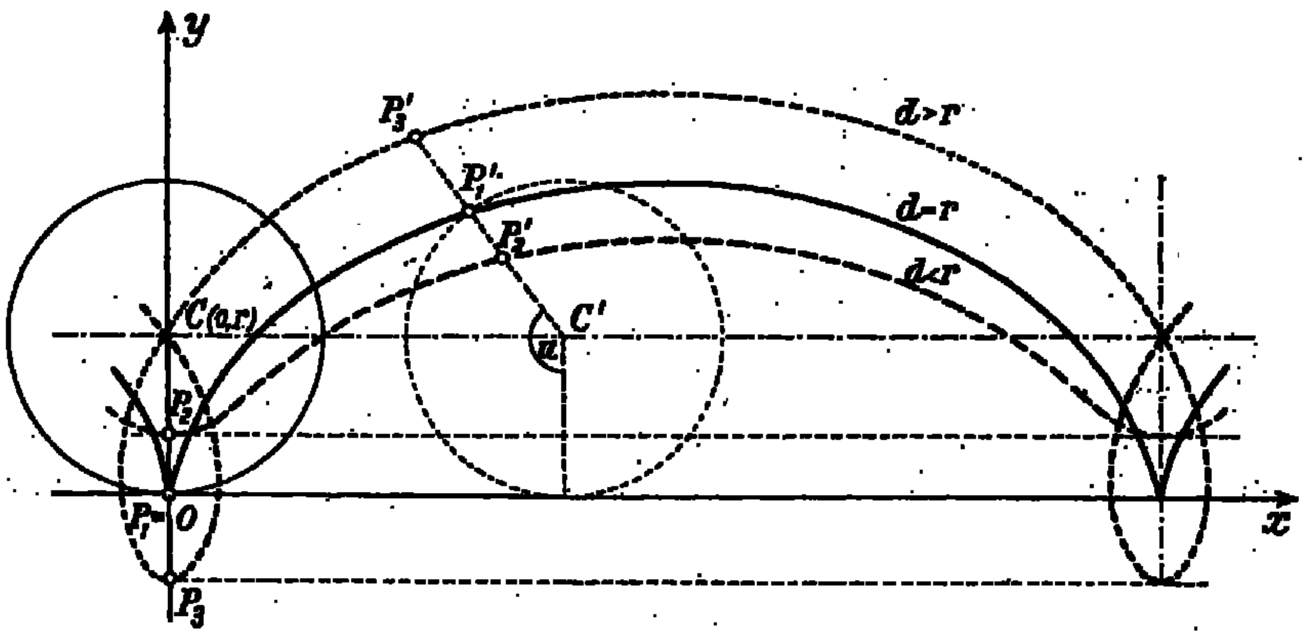

Fig. 39.

dinaria, è accorciata quella a cui appartiene il punto P_2 e allungata quella a cui appartiene il punto P_3 $(d = C\,P_i\,,\ i = 1, 2, 3)$.

La cicloide ordinaria e quella allungata posseggono infiniti punti doppi (come in fig. 39), mentre quella accorciata non possiede punti multipli ma infiniti flessi.

La cicloide della retta si ottiene facendo rotolare (senza strisciare) un cerchio (di raggio r) sopra una retta fissa ed è la curva generata da un punto rigidamente collegato col cerchio mobile. La cicloide è ordinaria, accorciata, allungata secondo che la distanza d del punto dal centro del cerchio è rispettivamente $= r$, $< r$, $> r$. Essa fu studiata da molti grandi matematici e fisici intorno alla metà del secolo XVII .

Più generalmente le *cicloidi* si ottengono facendo rotolare (senza strisciare) un cerchio sopra una curva fissa e sono le curve generate da un punto rigidamente collegato col cerchio mobile. Se la curva fissa è una retta si hanno appunto le cicloidi della retta. Si chiamano *ipocicloidi* o *epicicloidi* le cicloidi della circonferenza: *ipocicloidi* quando il cerchio mobile e la circonferenza fissa si trovano dalla stessa parte della tangente comune nel punto di contatto, *epicicloidi* quando si trovano da parti opposte. Queste curve possono anche essere algebriche.

154. — SUPERFICIE.

L'insieme dei punti dello spazio ordinario (proiettivo, affine, euclideo) che soddisfano ad un'equazione

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

dove F è una funzione continua, si chiama superficie e la (1) dicesi *equazione* della superficie.

La (1) si suppone risolubile rispetto ad una delle variabili, ad esempio rispetto alla z. La (1) può allora scriversi

$$z = f(x, y) \tag{2}$$

che si chiama *forma esplicita* dell'equazione della superficie.

Parlando di punti si sono intesi punti reali ma, accanto ai punti reali della superficie di equazione (1), si possono considerare anche punti immaginari (n. 28) che soddisfano la (1). Anzi, data un'equazione del tipo (1), può anche darsi che esistano soltanto punti immaginari della superficie relativa. Così avviene, ad esempio, per la superficie di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1 .$$

Se lo spazio è euclideo, le x, y, z si supporranno generalmente coordinate cartesiane e la (1) si dirà allora *equazione cartesiana* della superficie, ma potranno anche essere, ad esempio, coordinate polari (n. 150) e la (1) si dirà allora *equazione polare* della superficie.

155. — Curve.

L'insieme dei punti dello spazio ordinario (proiettivo, affine, euclideo) che soddisfano ad un sistema di due equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

dove le f, φ sono funzioni continue, si chiama curva e le (3) si dicono *equazioni* della curva.

Le equazioni (3) prese separatamente rappresentano due superficie (n. 154) e si dice che la curva di equazioni (3) è l'intersezione delle due superficie (supposte le due superficie prive di una superficie comune).

Una curva dicesi *sghemba* quando non sta in un piano. Può avvenire che, data una curva sghemba $\mathcal{C}$, considerate due superficie passanti per $\mathcal{C}$, queste abbiano in comune, oltre $\mathcal{C}$, anche altre curve (*curve residue*), di guisa che $\mathcal{C}$ risulti soltanto *intersezione parziale* di quelle superficie. Occorrerà allora escludere dalla considerazione quelle soluzioni del sistema (3) che non dànno punti di $\mathcal{C}$, i criteri per l'esclusione dipendendo dal caso considerato. Si può anche aggiungere alle (3) le equazioni di altre superficie passanti per $\mathcal{C}$ in modo di ottenere un sistema che rappresenti soltanto la $\mathcal{C}$.

In ogni caso, le equazioni della curva non sono individuate. Se infatti la curva $\mathcal{C}$ è data dal sistema (3) essa è data anche da ogni sistema

$$\left\{\begin{aligned} F\,(x\,,\,y\,,\,z) &= 0 \\ \Phi\,(x\,,\,y\,,\,z) &= 0\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

equivalente a (3), tale cioè che ogni terna di valori x , y , z che soddisfi (3) soddisfa anche (4) (e inversamente).

156. — Equazioni parametriche di una curva.

In molte questioni, anzichè avere le equazioni (3) di una curva, si hanno le x, y, z espresse mediante funzioni (ad un sol valore) di una variabile ausiliaria (*parametro*) u, si ha cioè

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u). \tag{6}$$

Allora, ad ogni valore di u, compreso nell'intervallo in cui sono definite f, φ, ψ, corrisponde un punto (x, y, z) dello spazio; e quando tali funzioni siano continue, variando u con continuità, il punto genera una curva, della quale le (6) sono le *equazioni parametriche*.

Una curva ammette infinite rappresentazioni parametriche, in corrispondenza alle infinite scelte che si possono fare del parametro.

Equazioni del tipo (3) della curva si possono ottenere eliminando u per esempio tra la prima e la seconda e tra la prima e la terza delle (6). Si ottengono così (nello spazio affine) le equazioni di due cilindri passanti per la curva e aventi le generatrici rispettivamente parallele agli assi z e y, mediante le quali la curva è rappresentata (eventualmente insieme ad una curva residua).

Talvolta, anzichè avere l'equazione (1) di una superficie, si hanno le x, y, z espresse mediante funzioni (ad un sol valore) di due variabili ausiliarie indipendenti (*parametri*) u, v, si ha cioè

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v). \tag{8}$$

Allora, per ogni coppia di valori di u, v, appartenenti alla regione in cui sono definite f, φ, ψ, corrisponde un punto (x, y, z) dello spazio; e quando tali funzioni siano continue, variando u, v, il punto genera, in generale, una superficie della quale le (8) sono le *equazioni parametriche* [1]

[1] Supposte le funzioni f, φ, ψ, oltre che finite e continue nella regione R in cui sono definite, anche dotate di derivate parziali (pure finite e continue), la condizione perchè le (8) rappresentino effettivamente una superficie (e non una curva) è che la matrice

intende

$$\text{rango}\left(\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix}\right|\right) < 2$$

non sia nulla per tutte le coppie di valori di u, v appartenenti ad R.

Una superficie ammette infinite rappresentazioni parametriche, in corrispondenza alle infinite scelte che si possono fare dei parametri.

Analogamente al n. 96, si ha:

L'equazione del tipo (1) *della superficie, si ottiene dalle equazioni parametriche* (8) *eliminando fra di esse i parametri* u *e* v.

Praticamente l'eliminazione di u, v si può ottenere risolvendo due delle equazioni (8), ad esempio le prime due, rispetto ad u, v, e sostituendo le espressioni ottenute per u, v (in funzione di x, y) nella terza; oppure cercando mediante procedimenti suggeriti dalla natura delle funzioni $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ una relazione fra x, y, z che sia una conseguenza delle (8) priva dei parametri u, v.

Si osservi che la forma esplicita $z = f(x, y)$ dell'equazione della superficie non è che un caso particolare delle (8), posto $x = u, y = v, z = f(u, v)$.

158. — Superficie algebriche e trascendenti.

Come le curve piane (n. 92), le superficie dello spazio (proiettivo, affine, euclideo) si dividono in due classi: *algebriche e trascendenti.*

Una superficie si dice *algebrica* quando nella sua equazione

$$f(x, y, z) = 0$$

$f(x, y, z)$ è un polinomio in x, y, z (2).

Le superficie non algebriche si dicono *trascendenti.*

Se il polinomio $f(x, y, z)$ è il prodotto di altri polinomi $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z), \ldots$ le coordinate di un punto della superficie, annullando f, annullano uno almeno dei polinomi $\varphi, \psi, \ldots$, e inversamente.

Quindi:

La superficie algebrica di equazione $\varphi \cdot \psi \ldots = 0$ si compone delle superficie (algebriche) di equazioni $\varphi = 0$, $\psi = 0, \ldots$.

In questo caso la superficie si dice *riducibile*. Nel caso contrario, *irriducibile*. Una coppia di piani porge un esempio di superficie (algebrica) riducibile.

Si ha poi dall'algebra:

Affinchè due polinomi irriducibili nelle coordinate x, y, z, uguagliati a zero, siano le equazioni di una stessa superficie (algebrica) è necessario e sufficiente che differiscano per un fattore costante.

Se $f(x, y, z) = 0$ è l'equazione di una superficie algebrica, il grado del polinomio $f(x, y, z)$ si dice *ordine* della superficie.

Le superficie algebriche di primo ordine sono quindi i piani e quelle di secondo ordine si dicono *quadriche.*

Per avere anche i punti impropri di una superficie occorre introdurre coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4. Se la superficie è algebrica d'ordine n, ponendo nella sua equazione $f(x, y, z) = 0$, $x = \dfrac{x_1}{x_4}$, $y = \dfrac{x_2}{x_4}$, $z = \dfrac{x_3}{x_4}$ e moltiplicando per x_4^n, si ottiene

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{9}$$

dove il primo membro è un polinomio omogeneo di grado n nelle variabili.

Riguardo all'ordine di una superficie algebrica si ha il seguente teorema (che si dimostra come l'analogo per le curve piane del n. 92):

Una superficie algebrica d'ordine n *è incontrata da ogni retta dello spazio, che non sia situata su di essa, in n punti (reali o immaginari, propri o impropri, distinti o coincidenti).*

Segue:

Una superficie algebrica d'ordine n è incontrata da un piano in una curva algebrica d'ordine n, a meno che il piano non faccia parte della superficie.

Una curva che si possa considerare come intersezione (*completa*) di superficie algebriche dicesi *algebrica*. Si può anche dire che una curva è *algebrica* quando il cono (n. 166) passante per essa e avente per vertice un punto generico dello spazio è una superficie algebrica.

Le curve non algebriche si dicono *trascendenti*.

Si ha:

La curva intersezione di due superficie algebriche F_m, F_n di ordini m, n è intersecata da un piano generico dello spazio in $m \cdot n$ punti (*reali o immaginari, propri o impropri, distinti o coincidenti*).

Una curva algebrica $\mathcal{C}$ è intersecata da un piano generico dello spazio in un numero fisso di punti (*reali o immaginari, propri o impropri, distinti o coincidenti*), *al variare del piano.*

Tale numero fisso dicesi *ordine* della curva $\mathcal{C}$ (1).

La proprietà sopra dimostrata si può ora enunciare così:

La curva intersezione di due superficie algebriche di ordini m, n è di ordine $m \cdot n$.

Una curva algebrica (piana o sghemba) si dice *riducibile* quando si decompone in curve d'ordine più basso. *Irriducibile* nel caso contrario.

Ad esempio, una coppia di rette sghembe costituisce una curva algebrica riducibile del 2^0 ordine.

Ora si noti che:

Una cubica sghemba (irriducibile o no) non è mai l'intersezione completa di due superficie algebriche.

Infatti due superficie algebriche d'ordini m, n, con $m > 1$, $n > 1$, si tagliano in una curva d'ordine $m \cdot n > 3$.

Una curva algebrica irriducibile che sia l'intersezione completa di *due* superficie algebriche dicesi *curva intersezione completa*. Nel caso opposto, quando cioè non esistono *due* superficie algebriche di cui la data curva algebrica irriducibile è l'intersezione completa, la curva dicesi *curva intersezione parziale* (o *incompleta*).

Enunciamo infine, senza dimostrazione, il teorema:

Una curva algebrica d'ordine m e una superficie algebrica d'ordine n che non contenga parti della curva, hanno $m \cdot n$ punti comuni (ciascuna intersezione contata opportunamente).

Segue il teorema (*teorema di Bézout* per le superficie):

Tre superficie algebriche di ordini m, n, p non passanti per una stessa curva, hanno $m \cdot n \cdot p$ punti comuni.

Infatti le due superficie di ordini m, n s'intersecano, come sappiamo, in una curva $\mathcal{C}$ di ordine $m \cdot n$ e $\mathcal{C}$ interseca, per il teorema sopra enunciato, la terza superficie in $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot n \cdot p$ punti. I punti comuni a $\mathcal{C}$ e alla terza superficie sono i punti comuni alle tre superficie.

162. — Retta tangente ad una curva.

Il concetto di *retta tangente* ad una curva in un suo punto, già incontrato per le curve piane (n. 98) si estende, con ovvie modificazioni, alle curve sghembe.

Nello spazio affine, sia P un punto della curva rappresentata dalle (6) del n. 156. Preso un secondo punto P_1 della curva ed indicati con $\bar{u}$ ed $\bar{u} + h$ i valori di u ai quali corrispondono rispettivamente P e P_1, consideriamo la retta PP_1, le cui equazioni si possono scrivere nella forma

$$\frac{x - f(\bar{u})}{f(\bar{u} + h) - f(\bar{u})} = \frac{y - \varphi(\bar{u})}{\varphi(\bar{u} + h) - \varphi(\bar{u})} = \frac{z - \psi(\bar{u})}{\psi(\bar{u} + h) - \psi(\bar{u})},$$

od anche, dividendo i denominatori per $h \neq 0$,

$$\frac{x - f(\bar{u})}{\dfrac{f(\bar{u} + h) - f(\bar{u})}{h}} = \frac{y - \varphi(\bar{u})}{\dfrac{\varphi(\bar{u} + h) - \varphi(\bar{u})}{h}} = \frac{z - \psi(\bar{u})}{\dfrac{\psi(\bar{u} + h) - \psi(\bar{u})}{h}}.$$

Supponiamo ora che il punto P_1, variando sulla curva, tenda a P; ammesso che le funzioni $f(u)$, $\varphi(u)$, $\psi(u)$ siano derivabili per $u = \bar{u}$ e che $f'(\bar{u})$, $\varphi'(\bar{u})$, $\psi'(\bar{u})$ non siano tutte tre nulle, la retta PP_1 tende ad una posizione limite determinata, avente per equazioni

$$\frac{x - f(\bar{u})}{f'(\bar{u})} = \frac{y - \varphi(\bar{u})}{\varphi'(\bar{u})} = \frac{z - \psi(\bar{u})}{\psi'(\bar{u})}. \tag{14}$$

Pertanto, nelle ipotesi suddette *esiste la tangente alla curva nel punto P ed i suoi coefficienti direttivi sono* $f'(\bar{u})$, $\varphi'(\bar{u})$, $\psi'(\bar{u})$.

Nello spazio euclideo, il piano perpendicolare alla retta tangente, nel suo punto di contatto (proprio) P, dicesi *piano normale* alla curva in P.

Nello spazio proiettivo, si abbia una curva di equazioni parametriche (n. 156)

$$x_i = f_i(u) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

e sia $\overline{P}$ un punto della curva relativo al valore $\overline{u}$ del parametro. Si chiama *punto derivato primo* relativo al punto $\overline{P}$ il punto di coordinate $f_i'(\overline{u})$, le cui coordinate sono cioè le derivate delle f_i calcolate per $u = \overline{u}$ supposte esistenti e finite. Orbene, *la tangente in $\overline{P}$ alla curva si può anche definire come la retta individuata dal punto $\overline{P}$ e dal punto derivato primo*. Essa ha quindi le equazioni (n. 33)

abbreviazione per: rango minore del massimo possibile

$$(15) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ f_1(\overline{u}) & f_2(\overline{u}) & f_3(\overline{u}) & f_4(\overline{u}) \\ f_1'(\overline{u}) & f_2'(\overline{u}) & f_3'(\overline{u}) & f_4'(\overline{u}) \end{matrix} \right\| = 0 .$$

163. — Piano tangente ad una superficie.

Nello spazio proiettivo, si abbia una superficie Σ di equazioni parametriche

$$x_i = f_i(u, v) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

e sia $\overline{P}$ un punto di Σ relativo ai valori $\overline{u}$, $\overline{v}$ dei parametri.

Si chiamano *punti derivati primi* relativi al punto $\overline{P}$ rispettivamente il punto di coordinate $\dfrac{\partial f_i}{\partial u}$ e il punto di coordinate $\dfrac{\partial f_i}{\partial v}$ (supposte le f_i derivabili), le cui coordinate sono cioè le derivate parziali delle f_i rispetto ad u per il primo punto e rispetto a v per il secondo, calcolate per $u = \overline{u}$, $v = \overline{v}$.

Le tangenti, in un punto generico $\overline{P}$ di una superficie, alle infinite curve tracciate sopra la superficie e passanti per $\overline{P}$, stanno tutte in un medesimo piano.

Questo piano si chiama *piano tangente alla superficie* in $\overline{P}$; e $\overline{P}$ si dice *punto di contatto* di quel piano. Le rette tangenti in $\overline{P}$ alle infinite curve tracciate sulla superficie e passanti per $\overline{P}$ si dicono pure *tangenti alla superficie* in $\overline{P}$; esse formano dunque un fascio di centro $\overline{P}$ e appartenente al piano tangente.

E inoltre :

Il piano tangente ad una superficie in un suo punto $\bar{P}$ è il piano individuato da $\bar{P}$ e dai due punti derivati primi relativi a $\bar{P}$.

L'equazione del piano tangente a Σ nel punto $\bar{P}$ ha quindi l'equazione

$$
\begin{vmatrix}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\
\dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_4}{\partial u} \\
\dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} & \dfrac{\partial f_4}{\partial v}
\end{vmatrix} = 0 \tag{17}
$$

dove le f_i, $\dfrac{\partial f_i}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial v}$ sono calcolate per $u = \bar{u}$ e $v = \bar{v}$.

Se la superficie, in coordinate non omogenee x, y, z, ha le equazioni parametriche

$$(18) \qquad x = f(u, v), \; y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

per avere l'equazione del piano tangente nel punto $\overline{P}(\overline{u}, \overline{v})$, basta porre nella (17) $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$, $f_1 = f$, $f_2, = \varphi$, $f_3 = \psi$, $f_4 = 1$. Sottraendo poi la seconda orizzontale dalla prima si ottiene

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} x - f & y - \varphi & z - \psi \\ f'_u & \varphi'_u & \psi'_u \\ f'_v & \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} = 0,$$

dove $f, \varphi, \ldots$ sono calcolate per $u = \overline{u}$, $v = \overline{v}$.

Se l'equazione della superficie ha la forma esplicita

$$z = F(x, y), \tag{20}$$

si ricordi (n. 157) che la (20) rientra nelle (18) quando si assumano per parametri u, v le x, y. Quindi per avere l'equazione del piano tangente nel punto $\overline{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ basta porre nella (19)

$x = u = f$, $y = v = \varphi$, $\psi = F$, $f(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{x}$, $\varphi(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{y}$, $\psi(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{z}$.

Si ottiene

$$z - \bar{z} = (x - \bar{x}) F'_x + (y - \bar{y}) F'_y \tag{21}$$

dove F'_x, F'_y sono calcolate per $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

Se poi la superficie ha l'equazione di tipo generale

$$f(x, y, z) = 0, \tag{22}$$

l'equazione del piano tangente nel punto $\overline{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è

$$(x - \bar{x}) f'_x + (y - \bar{y}) f'_y + (z - \bar{z}) f'_z = 0, \tag{23}$$

dove f'_x, f'_y, f'_z sono calcolate per $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$ [1].

---

[1] Dalla (21) si perviene alla (23) tenendo presente che la $f(x, y, z) = 0$ definisce la z come funzione $F(x, y)$ della x, y e che si ha

$$F'_x(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{f_x'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{f_z'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}, \quad F_y'(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{f_y'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{f_z'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}.$$

Se la superficie è algebrica e, in coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4, ha l'equazione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

dove f è un polinomio omogeneo (di grado n) nelle x_i, il piano tangente nel punto $\overline{P}(\bar{x}_i)$ è

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \tag{24}$$

dove $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, ... sono calcolate per $x_i = \bar{x}_i$ [2].

[2] Dalla relazione di EULERO

$$n \cdot f = \Sigma_i \, x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \; (i = 1, 2, 3, 4),$$

essendo $\bar{x}_i$ un punto della superficie, segue

$$\Sigma_i \, \bar{x}_i \frac{\partial f(\bar{x}_i)}{\partial x_i} = n \cdot f(\bar{x}_i) = 0 .$$

Tenendo conto di questa relazione, posto

$$x_1 = x, \; x_2 = y, \; x_3 = z, \; x_4 = 1, \; \bar{x}_1 = \bar{x}, \bar{x}_2 = \bar{y}, \; \bar{x}_3 = \bar{z}, \; \bar{x}_4 = 1,$$

la (24) coincide con la (23).

Quando il piano tangente nel punto $\overline{P}$ è determinato, $\overline{P}$ dicesi punto *semplice* della superficie. Nel caso opposto $\overline{P}$ dicesi *multiplo*.

Se la superficie è rappresentata ad esempio dalla (22), $\overline{P}$ è multiplo quando (e solo quando) $f'_x = f'_y = f'_z = 0$ per $x = \overline{x}\,, y = \overline{y}\,, z = \overline{z}\,.$

Nello spazio euclideo, la retta perpendicolare al piano tangente, nel suo punto di contatto $\overline{P}$, si dice *normale* alla superficie in $\overline{P}$.

O s s e r v a z i o n e :

Possiamo ora completare un punto lasciato in sospeso nel n.º precedente assegnando le equazioni della tangente t in un punto $\overline{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ad una curva $\mathfrak{C}$ di equazioni

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Manifestamente t è l'intersezione dei piani tangenti in P alle superficie $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ e quindi ha le equazioni

$$\begin{cases} (x - \bar{x}) f'_x + (y - \bar{y}) f'_y + (z - \bar{z}) f'_z = 0 \\ (x - \bar{x}) \varphi'_x + (y - \bar{y}) \varphi'_y + (z - \bar{z}) \varphi'_z = 0 \end{cases}$$

Nello spazio affine, l'insieme delle rette g parallele ad una retta data d condotte per i punti di una curva $\mathcal{C}$ è una superficie che chiamasi *cilindrica*, o, brevemente, un *cilindro*. Le rette g si chiamano le *generatrici* del cilindro. Un piano, non parallelo a d, interseca le generatrici g in punti di una curva, sicchè la curva $\mathcal{C}$, a partire dalla quale si definisce il cilindro, può sempre supporsi piana.

Ciò posto, consideriamo una equazione in due variabili x, y

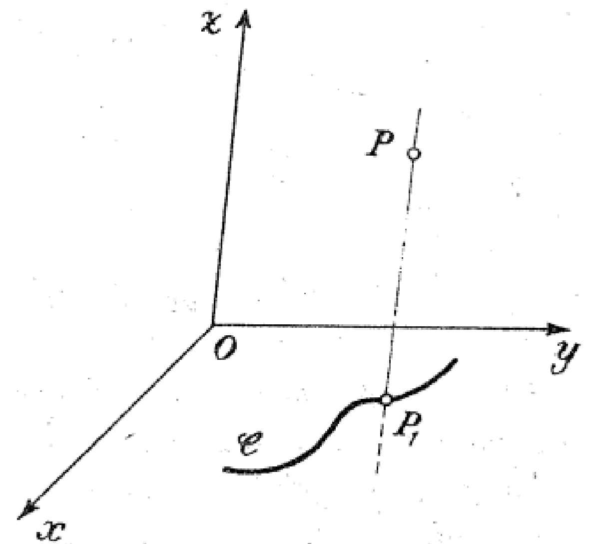

Fig. 49.

$$(1) \qquad f(x, y) = 0 .$$

Nel piano xy essa rappresenta una curva $\mathcal{C}$; esaminiamone il significato nello spazio xyz (fig. 49). Sia P_1 un punto di $\mathcal{C}$, ogni punto $P(x, y, z)$ della parallela all'asse z condotta per P_1 ha la stessa x e la stessa y di P_1; sicchè le coordinate di qualsiasi punto di questa retta soddisfano all'equazione (1). Altrettanto dicasi per ogni altro punto della curva $\mathcal{C}$. D'altra parte, le parallele per i punti di $\mathcal{C}$ all'asse z formano un cilindro. Siccome le coordinate di tutti e soli i punti di questo cilindro soddisfano alla (1), si conclude che la (1) è l'equazione del cilindro formato dalle rette (generatrici) parallele all'asse z, condotte per i punti della curva $\mathcal{C}$.

Se la (1) è nel piano xy l'equazione di una conica (n. 92), il cilindro di equazione (1), si dice *cilindro del 2° ordine* (o *quadrico*).

O s s e r v a z i o n e :

Un'equazione in una sola variabile x

$$f(x) = 0 \tag{5}$$

nello spazio xyz *è l'equazione di una superficie costituita da piani paralleli al piano* $x = 0$.

Infatti se x_0 soddisfa alla (5), cioè se $f(x_0) = 0$, tutti i punti del piano parallelo a $x = 0$ e passante per il punto $(x_0, 0, 0)$ dell'asse x hanno coordinate che pure soddisfano alla (5). La superficie è quindi costituita da tanti piani paralleli a $x = 0$ quante sono le radici dell'equazione (5).

166. — CONO.

Nello spazio proiettivo, l'insieme delle rette g congiungenti i punti di una curva $\mathcal{C}$ con un punto dato V si chiama *superficie conica* o, brevemente, *cono* di *vertice* V. Le rette g si chiamano *generatrici* del cono. Un piano, non passante per V, interseca le generatrici g in punti di una curva, sicchè la curva $\mathcal{C}$, a partire dalla quale si definisce il cono, può sempre supporsi piana (1).

Se nell'equazione $f(x, y, z) = 0$ *di una superficie il primo membro* $f(x, y, z)$ *è una funzione omogenea nelle variabili, la superficie è un cono col vertice nell'origine.*

---

(1) Nello spazio affine, il punto V si suppone proprio; se nella precedente definizione V fosse improprio, si ritroverebbe il cilindro.

170. — Superficie rigate.

Nello spazio proiettivo, una superficie che sia l'insieme di ∞^1 rette si chiama *rigata*.

Le ∞^1 rette si dicono *generatrici* della rigata; una curva della superficie che incontri ogni generatrice, ad esempio una sezione piana generica, dicesi una *direttrice* della rigata.

Sono esempi di superficie rigate i cilindri (n. 165), i coni (n. 166); le rette tangenti ad una curva sghemba (n. 162) formano pure una rigata. Si ha:

Una superficie rigata è, in generale, individuata da tre direttrici.

Nello spazio affine, le equazioni di una generatrice generica della superficie rigata siano

$$\frac{x - f_1(u)}{l_1(u)} = \frac{y - f_2(u)}{l_2(u)} = \frac{z - f_3(u)}{l_3(u)} \tag{17}$$

nelle quali $f_1, f_2, f_3, l_1, l_2, l_3$ sono funzioni di un parametro u (al variare del quale si ottengono tutte le ∞^1 generatrici della rigata).

Detto v il valore comune dei tre rapporti (17), si hanno per la superficie rigata le equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= f_1(u) + v l_1(u), \\ y &= f_2(u) + v l_2(u), \\ z &= f_3(u) + v l_3(u), \end{aligned} \tag{18}$$

dove le curve $u = \text{cost.}$ sono le rette della superficie.

Se f_1, f_2, f_3 sono costanti rispetto ad u ed è $f_1 = a, f_2 = b, f_3 = c$, le (18) rappresentano un cono col vertice nel punto (a, b, c). Se invece l_1, l_2, l_3 sono costanti rispetto ad u, ed è $l_1 = l, l_2 = m, l_3 = n$, le (18) rappresentano un cilindro le cui generatrici passano per il punto improprio $(l, m, n, 0)$.

171. — Superficie di rotazione (o rotonde).

Nello spazio euclideo, sia data una retta r e una curva L. Considerato un piano α perpendicolare ad r, sia $\mathcal{C}$ la circonferenza del piano α avente il centro nel punto in cui α interseca r e passante per un punto in cui α interseca L. Al variare di α si ottengono così ∞^1 circonferenze $\mathcal{C}$. La superficie Σ insieme di queste ∞^1 circonferenze $\mathcal{C}$ si dice di *rotazione* (o *rotonda*); la retta r si chiama *asse* (*di rotazione*) di Σ, mentre le circonferenze $\mathcal{C}$ si chiamano *paralleli* di Σ.

L'intersezione della superficie con un piano perpendicolare all'asse, se esiste (dal punto di vista reale), si compone di uno o più paralleli.

Un piano passante per l'asse interseca la superficie in una curva simmetrica rispetto all'asse r (in simmetria ortogonale: n. 91) che si dice *meridiano*. Ciascuna delle due parti del meridiano, simmetriche l'una dell'altra rispetto ad r, si dicono *semimeridiani*.

Per ottenere la superficie Σ si può sostituire alla curva L una curva qualunque tracciata sopra Σ che incontri in un punto ogni parallelo, in particolare un meridiano o un semimeridiano.

È chiaro che una superficie di rotazione è individuata quando se ne conoscano l'asse e il meridiano (o semimeridiano).

Si ha:

Data nel piano xz la curva M di equazione

(19) $$f(x, z) = 0,$$

la superficie di rotazione di asse z e di meridiano M ha l'equazione

(20) $$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

dove la (20) *si ottiene dalla* (19) *sostituendo in essa ad x l'espressione* $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

172. — *Elica circolare.*

Nello spazio euclideo si chiama *elica circolare* la curva di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \\ y &= r \operatorname{sen} u \\ z &= h\, u \end{aligned} \tag{23}$$

dove u è il parametro e r, h sono costanti reali ($r > 0$).

L'elica (23) *giace sul cilindro circolare retto avente per asse l'asse* z *e avente per raggio* r (n. 149). Infatti eliminando u fra le due prime delle (23) si ottiene

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{24}$$

che rappresenta appunto (n. 165) il cilindro suddetto. L'asse z (asse del cilindro) si chiama *asse* dell'elica e il raggio r del cilindro si chiama *raggio* dell'elica.

Una generatrice qualunque del cilindro (n. 165) *interseca l'elica in infiniti punti e due consecutivi di essi hanno una distanza costante uguale a* $2|h|\pi$.

Infatti gli infiniti punti dell'elica posti sopra una medesima generatrice del cilindro si ottengono dalle (23) ponendo $u + 2k\pi$ in luogo di u (k intero > 0 oppure < 0), poichè in tal modo la x e la y non mutano, mentre in luogo di z si ottiene $z + 2hk\pi$. La distanza (in valore assoluto) di due consecutivi di tali punti, dati dai valori $\bar{k}$ e $\bar{k} + 1$ di k, è appunto

$$|z + 2h(\bar{k} + 1)\pi - (z + 2h\bar{k}\pi)| = 2|h|\pi .$$

La costante $2|h|\pi$ si chiama *passo* dell'elica.

Si ha:

L'elica forma con le generatrici del cilindro un angolo costante.