Sp. vettoriale V

$v_1 \dots v_h \in V$ si dicono

linearmente dipendenti

se $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_h \in \mathbb{K}$ non

tutti nulli t.c.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_h v_h = \overline{0_V}$$

PROP – Se esclusa $v_1 \dots v_h$ sono

lin. dip., allora ce n'è

uno di essi che è combi=

nazione lineare degli altri.

Dato $X \subset V$, chiusura lineare di X, $L(X)$ o span(X) o $\langle X \rangle$ è l'insieme (che risulta sottospazio vettoriale) di tutte le combinazioni lineari di vettori di X

X viene detto **sistema di generatori di V** se $V = L(X)$.

PROP — Se X è un sist. di gen. di V, linearmente dipendente, allora $\exists\, \bar{v} \in X$ tale che $X - \{\bar{v}\}$ è ancora un sist. di gen. di V.

Base di V è un suo sist di gen linearmente indipendente.

PROP - Se in V c'è una base di cardinalità n, allora tutte le sue basi hanno cardinalità n.

Dimensione di V: la cardinalità di ogni sua base.

Data $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, **rango** di A, $r(A)$, è la dimensione del sottospazio di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A.

PROP - $r({}^tA) = r(A)$

Perciò $r(A)$ è anche la dimensione del sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A.

Metodo 1 per calcolare $r(A)$.

PROP - Le trasformazioni elementari di riga non cambiano il sottospazio generato dalle righe, quindi non cambiano il rango.

Una matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ si dice ridotta se valgono 1 e 2 seguenti:

1. Se ci sono righe nulle, sono le ultime
2. Detto pivot di una riga l'elemento non nullo più a sinistra della riga,

il pivot della riga $i+1$ è più a destra del pivot della riga i $\forall i$

PROP - Il rango di una matrice ridotta è = al numero delle sue righe non nulle

---

PROP - Data una qualunque matrice, esistono

Successioni di trasf. elementari di riga che la trasformano in ridotta.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{II} \leftarrow \mathrm{II} - \mathrm{I}$$

$$\mathrm{IV} \leftarrow \mathrm{IV} + 2\,\mathrm{I}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{III} \leftarrow \mathrm{III} - 4\,\mathrm{II}$$

$$IV \leftarrow IV + 5II$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$IV \leftarrow IV + \frac{5}{4} III$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \end{array} \quad 3$$

$$rA = 3$$

Dato in A un minore M, chiamo suo orlato ogni minore M' di A tale che

M sia minore di M'. Cioè
M' è ottenuto da A
intersecando tutte le righe
di A da cui è stato estratto
M più una, con tutte le
colonne di A da cui è stato
estratto M più una.

TEOR (Kronecker)

$$\varrho A = k$$

$\Updownarrow$

$\exists$ minore M di A, di ordine k, con $|M| \neq 0$, e tutti i minori di ordine $> k$ hanno det $= 0$

$\Updownarrow$

$\exists$ minore M di ordine k con $|M| \neq 0$, e tutti i suoi orlati hanno det $= 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |M| \neq 0 \qquad 2 \leq rA \leq 4$$

$$|\Theta_1| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3 \leq rA \leq 4$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0$$

$$|O_3| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -10 & -5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0$$

$$r A = 3$$