Sistema lineare di m equazioni in n incognite una coppia (A, b) dove $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{K})$.

matrice incompleta

colonna dei termini noti

La matrice $C \in M_{m \times (n+1)}(\mathbb{K})$ ottenuta aggiungendo b alle colonne di A viene detta **matrice completa del sistema.**

Una **soluzione** di $S=(A,b)$ (se esiste) è una n-pla $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ tale che $A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = b$

Il sistema si indica usualmente mediante le sue equazioni, dove

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è una n-pla di incognite, $\bar{x}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

cioè
$$\begin{cases} a^1_1 x_1 + \dots + a^1_n x_n = b_1 \\ \dots \\ a^m_1 x_1 + \dots + a^m_n x_n = b_m \end{cases}$$

Il sistema si dice

possibile se ha almeno una soluzione, impossibile altrimenti. Si dice determinato se hanno un'unica soluzione, indeterminato se la soluzione non è unica

---

TEOR (Rouché-Capelli)

è possibile $\Leftrightarrow$ $rA = rC$

Se S è possibile, esso è determinato $\iff$ $\iff$ $rA = rC = n$.

Altrimenti le soluzioni dipendono da $n-r$ parametri, dove $r = rA = rC$.

Ciò si usa descrivere come ∞^{n-r} soluzioni.

Metodo 1 per la risoluzione di un sistema possibile (Gauss-Jordan)

---

1) Scrivo la matrice completa C di S e la porto in forma ridotta mediante trasf. elementari di riga, ottenendo una matrice C'

2') Se C' ha una riga in cui il pivot è l'elemento più a destra, allora S è impossibile

2'') Se ciò non accade, elimino le eventuali righe nulle, ottenendo una matrice C''

3) Eventualmente introdu=

rendo parametri, risolvo l'ultima equazione del sistema "S" di cui "C" è matrice completa, e sostituisco nelle equazioni precedenti

4) Itero il passo 3.

Metodo 2 (Kronecker + Ranché – Capelli)

0) Ho trovato in A un minore M di ordine r con $|M| \neq 0$ e tale che tutti i suoi orlati in A e in C abbiano $\det = 0$

1) Cancello le equazioni i cui coefficienti <u>non</u> hanno contribuito a formare M.

2) Trasformo in altrettanti parametri indipendenti le $n-r$ incognite i cui coefficienti <u>non</u> hanno contribuito a formare M, e porto a 2° membro.

3) Ho un sistema di r eq. in r incognite con M come matrice incompleta e con termini noti dipendenti

da $n-r$ parametri

Lo risolvo.

TEOR (Cramer) Se in $S = (A, b)$ si ha $A \in M_n$ e $|A| \neq 0$, allora S ha un'unica soluzione $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ ottenuta da

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b$$