Dati sp. vett. V, W,
$T: V \to W$ è detta
lineare se $\forall\, v, v' \in V$
$$T(v+v') = T(v) + T(v')$$
$\forall\, \alpha \in \mathbb{K}\ \forall\, v \in V$
$$T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

Rappresentazione matriciale di una

Trasf. lin. $T: V \to W$

Fissiamo una base ordinata $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ in V, una $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_m)$ in W.

$\overline{A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)} \in M_{m \times n}(K)$ ha come i-esima colonna la m-pla delle componenti di $T(e_i)$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

TEOR - Se $v =_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$T(v) =_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, allora

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$V = \{$polin. di grado $\leq 2\}$

$W = M_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2)$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$T: V \longrightarrow W$$

$$p \longmapsto \begin{pmatrix} p(0) & p'(1) \\ 3p(2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \equiv_{\mathcal{B}'} (1, 0, 3, 0)$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \equiv_{\mathcal{B}'} (0, 1, 6, 0)$$

$$x^2 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \equiv_{\mathcal{B}'} (0, 2, 12, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = 5 - 3x + 2x^2 =_{\mathcal{B}} (5, -3, 2)$$

$$T(p(x)) =_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 0 \end{pmatrix}$$

TEOR FOND. delle tr. lin.

V, W

$\mathcal{B}$ base di V

per ogni applicazione

$f: \mathcal{B} \to W$

$\exists! \; T: V \to W$ lineare

t.c. $T|_{\mathcal{B}} = f$.

In V, rispetto a una

base $\mathcal{B}$, , siano

$v \equiv_{\mathcal{B}_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v' \equiv_{\mathcal{B}_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In W, rispetto a una base $\mathcal{B}_2$, siano

$w \equiv_{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w' \equiv_{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

---

a) Si verifichi che $\mathcal{B} = (v, v')$ è una base di V,

b) si scrive $A = M_{B_1 B_2}(T)$

dove $T : V \to W$

è la trasf. lin. t.c.

$T(v) = w$, $T(v') = w'$.

c) Dato $\bar{v} \equiv_{B_1} (5, -2)$, si

trovino le comp. risp. a

B_2 di $T(\bar{v})$.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |X| = -1 \neq 0$

$\mathcal{B}$ base

b) $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot X^{-1} \qquad Y \cdot X^{-1}$$

$$A = Y \cdot X^{-1} \qquad X^{-1} = -\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

c) $$T(\overline{v}) = B_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\subset V}{\operatorname{Ker} T} = \{ v \in V \mid T(v) = \overline{0}_{W} \}$$

$\operatorname{Im} T = \{ w \in W \mid \exists\, v \in V \text{ t.c. } w = T(v) \}$
$\subset W$

PROP

$rA = \dim \operatorname{Im} T$

PROP -

$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

COR

$\dim \operatorname{Ker} T = n - rA$

COR

T suriettiva $\iff r_A = m$

T iniettiva $\iff r_A = n$

Rappresentazioni di sottospazi vettoriali

U s.sp.vett. di V

Fisso una base ord. in V.

Posso rappresentare U come nucleo di un'opportuna tr. lin. che parte da V.

$$V \xrightarrow{T} \mathbb{K}^m$$

$U = \operatorname{Ker} T$ rappr. cartesiana di U

Posso rappresentare U come immagine di una opportuna tr. lin. che arriva in V

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{S} V$$

rappr. parametrica di U

$$U = \operatorname{Im} S$$

Dare rappresentazioni cartesiana e parame= trica minime, rispetti alla base naturale, del sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rappr. param.

$$U : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

Rappr. cartesiana

Imponendo

$$r\begin{pmatrix} x & 1 & 2\\ y & 0 & 1\\ z & 1 & -1\\ t & 1 & 0\end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} x & 1 & 2\\ y & 0 & 1\\ z & 1 & -1\end{vmatrix} = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} x & 1 & 2\\ y & 0 & 1\\ t & 1 & 0\end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$U: \begin{cases} -x+3y+z=0 \\ -x+2y+t=0 \end{cases}$$

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^{4-2}$$

$$U = \operatorname{Ker} T \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x+3y+z \\ -x+2y+t \end{pmatrix}$$