Forma quadratica su V

è una applicazione

$$q : V \to \mathbb{K}$$

tale che $\exists\ \varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare per cui $\forall v \in V$ sia

$$q(v) = \varphi(v, v)$$

PROP - Data una forma quadratica q, esistono varie forme bilineari

q per cui vale l'ugua-
glianza scritta sopra, di cui una sola è simme-
trica, essa viene detta **forma polare** di q.

COR

$q: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ è quadratica

$(x_1 - x_n) \longmapsto q(x_1 - x_n)$

$\Longleftrightarrow$ è polinomiale omogenea di 2^a grado nelle $x_1 \cdot\cdot x_n$

Esempio: l'associata

a $3xx' + 5xy' + 7yz'$

è la forma quadratica

$$3x^2 + 5xy + 7yz.$$

Data in V una base ordinata $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$,

data una forma bilineare

φ su V, la matrice di

Gram di φ rispetto a $\mathcal{B}$

è la matrice

$$A = \left(a^i_j\right)_{i,j \in N_n}$$

dove $a^i_j = \varphi(e_i, e_j)$.

PROP - Con $u \equiv_{B} (x_1 \cdots x_n)$,

$v \equiv_{B} (y_1 \cdots y_n)$,

$$\underset{1\times 1}{\varphi(u,v)} = \underset{1\times n}{(x_1 - x_n)} \cdot \underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

PROP - φ è simmetrica

$$\Updownarrow$$

A è simmetrica

COR - Se q è la forma quadratica associata a φ, allora $\forall v \in V$, con $v \equiv_{\mathcal{B}} (x_1 \dots x_n)$,

$$q(v) = (x_1 \dots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$3xx' + 5xy' + 7yz'$$

$$\begin{array}{c|ccc} & x' & y' & z' \\ \hline x & 3 & 5 & 0 \\ y & 0 & 0 & 7 \\ z & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Questa forma bilineare non è simmetrica.

Come sarà la forma polare di q?

$$q(x,y,z) = (x\ y\ z) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= 3x^2 + 5xy + 7yz$$