

Forma quadratica su  $V$

è una applicazione

$$q: V \rightarrow \mathbb{K}$$

tale che  $\exists \varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$

bilineare per cui  $\forall v \in V$

$$\text{sia } q(v) = \varphi(v, v).$$

---

PROP - Data una forma  
quadratica  $q$ , esistono  
varie forme bilineari

$q$  per cui vale l'uguaglianza  
distanza scritta sopra,  
di cui una sola è simme-  
trica, essa viene detta

forma polare di  $q$ .

---

$q: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  è quadratica  
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto q(x_1, \dots, x_n)$

$\Leftrightarrow$  è polinomiale omogenea  
di 2° grado nelle  $x_1, \dots, x_n$

---

Esempio, associata

è la forma quadratica

$$3x^2 + 5xy + 7yz$$

---

Dato in  $V$  una base ordinata  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,

data una forma bilineare

$\varphi$  su  $V$ , la **matrice di Gram** di  $\varphi$  rispetto a  $\mathcal{B}$

e' la matrice

$$A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$$

dove  $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ .

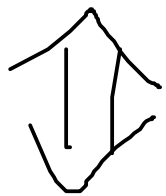
---

PROP - Con  $u \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$ ,

$v \equiv_{\mathcal{B}} (y_1, \dots, y_n)$ ,

$$\varphi(u, v) = \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1 \times n} \cdot \underbrace{A}_{n \times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n \times 1}$$

PROP -  $\varphi$  è simmetrica



$A$  è simmetrica

COR - Se  $q$  è la forma  
quadratica associata  
a  $\varphi$ , allora  $\forall v \in V$ , con

$$v \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$$

$$q(v) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$3xx' + 5xy' + 7yz'$$

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa forma bilineare non è simmetrica.

Come sarà la forma

quadratica di  $q$

$$q(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= 3x^2 + 5xy + 7yz$$