Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica, $\exists\, E \in O_n(\mathbb{R})$ t.c. $\exists\, \Lambda$ diagonale per cui

$$\Lambda = {}^tE \cdot A \cdot E$$

$$E^{-1} = {}^tE$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \mu_s & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$, $\quad \mu_1, \dots, \mu_s < 0$

S12

$$F = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \text{\Large 0} & \\ & & 1/\sqrt{\lambda_p} & & & & & \\ & & & 1/\sqrt{1-\mu_1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & \text{\Large 0} & & & & 1/\sqrt{1-\mu_s} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = {}^tF \cdot \Lambda \cdot F =$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{r} & & 0 \\ & \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{s} & \\ 0 & & 0 \ \ddots \ 0 \end{pmatrix}$$

Forma canonica per congruenza di A

Chiamiamo $\sigma_+ = r$ indice di positività di A: la somma delle molteplicità degli autovalori positivi di A, $\sigma_- =$ indice di negatività di A, somma delle molteplicità degli autovalori negativi di A

Segnatura di A:

$$\sigma = (\sigma_+, \sigma_-)$$

TEOR - $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simmetriche sono congruenti $\iff$ hanno segnature uguali.

TEOR (Harriot-Cartesio, versione debole) - Sia $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ un polinomio a coefficienti reali, con $a_0 \neq 0$, privo di radici complesse con parte immaginaria $\neq 0$.

Nella sequenza $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ chiamiamo permanenza ogni coppia (a_i, a_{i+1}) di segno uguale, variazione ogni coppia (a_i, a_{i+1}) di segni opposti (avendo assegnato agli eventuali zeri un segno arbitrario). Allora la somma delle molteplicità delle radici positive (negative) è uguale al numero di variazioni (permanenze).

Esempio: il polinomio

$$-4143 - 1407x + 775x^2 + 5x^3 - 19x^4 + x^5$$

è il polinomio caratteristico di una matrice reale simmetrica A.

Perciò, da

$$(-4143, -1407, 775, 5, -19, 1)$$

n. perm. : 2 n. var. : 3

$$\sigma(A) = (3, 2)$$

Forma can. per congr. di A :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}$$