A discrim. di $[f]$

$$\overline{X} \equiv \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ | \\ \overline{X}_n \end{pmatrix} \quad \overline{Y} \equiv \begin{pmatrix} \overline{Y}_0 \\ | \\ \overline{Y}_n \end{pmatrix} \quad Z \in \text{retta } \overline{X}\,\overline{Y}$$

$$Z \equiv \begin{pmatrix} Z_0 \\ | \\ Z_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ | \\ \overline{X}_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \overline{Y}_0 \\ | \\ \overline{Y}_n \end{pmatrix}$$

$$(Z) = \lambda(\overline{X}) + \mu(\overline{Y})$$

Cerco le intersezioni fra la retta e $\mathrm{Im}[f]$

$${}^t(z)\cdot A\cdot(z)=0$$

$${}^t\left(\lambda(\bar{X})+\mu(\bar{Y})\right)\cdot A\cdot\left(\lambda(\bar{X})+\mu(\bar{Y})\right)=0$$

$$\lambda\,{}^t(\bar{X})\cdot A\cdot\left(\lambda(\bar{X})+\mu(\bar{Y})\right)+$$

$$+\mu\,{}^t(\bar{Y})\cdot A\cdot\left(\lambda(\bar{X})+\mu(\bar{Y})\right)=0$$

$$\lambda\,{}^t(\bar{X})\cdot A\cdot\lambda(\bar{X})+\lambda\,{}^t(\bar{X})\cdot A\cdot\mu(\bar{Y})+$$

$$+\mu\,{}^t(\bar{Y})\cdot A\cdot\lambda(\bar{X})+\mu\,{}^t(\bar{Y})\cdot A\cdot\mu(\bar{Y})=0$$

$$*\quad\lambda^2\,{}^t(\bar{X})\cdot A(\bar{X})+2\lambda\mu\,{}^t(\bar{X})A\cdot(\bar{Y})+\mu^2\,{}^t(\bar{Y})A\cdot(\bar{Y})=0$$

Sia $\bar{y} \in Im[f]$

Perciò ${}^t(\bar{y}) \cdot A \cdot (\bar{y}) = 0$

Quindi * diventa

$$\lambda^2\, {}^t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{x}) + 2\lambda\mu\, {}^t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{y}) = 0$$

Raccolgo λ

$$\lambda\left(\lambda\, {}^t(\bar{x}) A \cdot (\bar{x}) + 2\mu\, {}^t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{y})\right) = 0$$

Supponiamo che la retta $\bar{x}\bar{y}$ sia tangente tipo 1

Cioè $\bar{Y}$ sia l'unico punto d'intersezione retta - immagine

Ma allora anche l'eq.

$$(\quad) = 0$$ deve avere

$\lambda = 0$ come soluzione.

$$\lambda^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{X}) + 2\mu^t(\bar{X}) \cdot A (\bar{Y}) = 0$$

da cui

$$\lambda = -2\mu \frac{{}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y})}{{}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{X})}$$

$\neq 0$

$\bar{X} \notin \mathrm{Im}[f] \Rightarrow$

Se quest'equazione ha $\lambda = 0$ come soluzione, dev'essere ${}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) = 0$

Sia invece la retta $\bar{X}\bar{Y}$ tangente di tipo 2. Allora l'equazione * dev'essere un'identità in $\mathbb{R}^n$

Ma allora tutti i coefficienti devono essere nulli

$t(\bar{x}) A \cdot (\bar{x}) = 0$ OK, $\bar{x} \in \mathrm{Im} f$

$t(\bar{y}) A \cdot (\bar{y}) = 0$ OK, $\bar{y} \in \mathrm{Im} f$

Ma anche

$$t(\bar{x}) A \cdot (\bar{y}) = 0$$

Totale 1 in entrambi i casi, perché la retta $\bar{X}\bar{Y}$ sia tangente ad $[f]$ in $\bar{Y}$ occorre che sia $t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) = 0$, cioè $\bar{X} \in \tau(\bar{Y})$.