$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0$$

$f(x) =$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\varphi(x) = 4f(x) - x f'(x) =$$

$$= -2x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

$\varphi(x) = 0 \qquad 2x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$

$f'(x) = 0 \qquad x^3 + x^2 - 6x + 4 = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 - 3x^2 - x + 2 & x^3 + x^2 - 6x + 4 \\
\cline{2-2}
-2x^3 - 2x^2 + 12x - 8 & 2 \\
\hline
// \; -5x^2 + 11x - 6 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 - 6x + 4 & -5x^2 + 11x - 6 \\
\cline{2-2}
-x^3 + \frac{11}{5}x^2 - \frac{6}{5}x & \frac{x}{-5} - \frac{16}{25} \\
\hline
// \; \frac{16}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 4 & \\
\quad -\frac{16}{5}x^2 + \frac{176}{25}x - \frac{96}{25} & \\
\hline
// \quad -\frac{4}{25}x + \frac{4}{25} \qquad x - 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-5x^2+11x-6 & x-1 \\ \hline
5x^2-5x & -5x+6 \\ \hline
// \quad 6x-6 & \\
-6x+6 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$f(x)=$

$f'(x)=2ax+b$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} =$$

$$= c\begin{vmatrix} 2a & b \\ 0 & 2a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & b \end{vmatrix} =$$

$$= 4a^2c + b(ab-2ab) =$$

$$= 4a^2c - ab^2 = -a(b^2-4ac)$$

Estensione complessa di uno spazio (vettoriale, affine, euclideo, proiettivo) reale: uno spazio della stessa natura, a coefficienti complessi, di cui lo spazio dato si possa considerare come la parte che si ottiene imponendo nulla la parte immaginaria.

Elementi immaginari di tale estensione complessa sono quelli che NON sono esprimibili mediante coordinate o coefficienti reali.

Per esempio, nel piano affine è immaginaria la retta $y - ix = 0$

È invece reale la retta $iy - ix = 0$

Nel piano proiettivo è immaginario il punto $(5-i, 3+i, -i)$, NON lo è il punto $(5-i, 10-2i, 20-4i)$: infatti è lo stesso punto che posso scrivere $(1,2,4)$.

PROP - Se l'intersezione di due elementi reali contiene un punto immaginario, allora contiene anche l'immaginario coniugato.

PROP - Ogni retta immaginaria contiene esattamente un punto reale

---

DIM: $r: (a+ib)x+(c+id)y+e+if = 0$

Interseco con la immaginaria coniugata:

$$\begin{cases} r) \ (a+ib)x+(c+id)y+e+if = 0 \\ \bar{r}) \ (a-ib)x+(c-id)y+e-if = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ax + 2cy + 2e = 0 \\ 2\cancel{i}bx + 2\cancel{i}dy + 2\cancel{i}f = 0 \end{cases}$$

rette reali con inter=
sezione reale.

PROP - L'intersezione di ogni circonferenza del piano con la retta impropria è costituita dagli stessi punti: $(0,1,i)$, $(0,1,-i)$.

DIM -

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 + \cancel{aX_1X_0} + \cancel{bX_2X_0} + \cancel{cX_0^2} = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1^2 + X_2^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

Tali punti sono detti **punti ciclici**.

PROP- Ogni sfera dello spazio ordinario interseca il piano improprio nella stessa conica (immaginaria):

$$\begin{cases} X_1^2+X_2^2+X_3^2=0 \\ X_0=0 \end{cases}$$

Tale conica è detta **cerchio assoluto** dello spazio ed è l'insieme dei punti ciclici di tutti i piani dello spazio.