Data $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

la trasposta di A è

${}^tA = (b_j^i) \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ dove

$b_j^i = a_i^j$

PROP - $\det({}^tA) = \det A$

PROP - Se A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$

PROP - Se B è ottenuta da A scambiando due righe, allora $\det B = -\det A$

PROP - Se B è ottenuta da A moltiplicando una riga per $\alpha \in \mathbb{K}$, allora $\det B = \alpha \det A$

PROP
Se A, B, C sono uguali tranne per la i-esima riga, e la i-esima riga di C è la somma delle i-esime righe di A e di B, allora $\det C = \det A + \det B$

COR
Se una riga di A è combinazione lineare delle altre righe, allora

$$\det A = 0$$

(e viceversa)

COR
Se ottengo B da A sommando a una riga di A una combinazione lineare delle altre righe, allora $\det B = \det A$

$A \in M_n(\mathbb{K})$ è detta triangolare (alta) se (bassa)

$L_{ij} \Rightarrow a_{ij} = 0$

$i < j \Rightarrow$

PROP: Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ è triangolare, allora

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Metodo di Gauss per il calcolo del determinante: utilizzo il secondo corollario per trasformare A in una matrice triangolare B che abbia lo stesso determinante, che calcolo con l'ultima prop.

$A = \begin{pmatrix} a^1_1 \end{pmatrix} \qquad \det A = a^1_1$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = + a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{array}\right) \begin{array}{cc} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{array} \qquad n = 3$$

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \end{array}$$

$$\det A = + a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2 - a^1_3 a^2_2 a^3_1 - a^1_1 a^2_3 a^3_2 - a^1_2 a^2_1 a^3_3$$

Trasformazioni elementari di riga:

T1: scambio di due righe

T2: ad una riga sommo una comb. lin. di altre righe

T3: moltiplico una riga per uno scalare $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$

PROP - Data $A \in M_n(\mathbb{K})$ $\exists$ una successione finita di trasf. T1 e T2 tale che la matrice ottenuta sia triangolare alta.

ESEMPI -

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \cdot 5 - 7 \cdot 1 = 3$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array}$$

$$\det A = 0 \cdot 1 \cdot (-2) + 2(-3) \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 4 + \\ - 5 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-3) \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) =$$

$$= 0 - 18 + 20 + \\ - 15 - 0 + 4 = -9$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$I \leftrightarrow II$

$III \leftarrow III - 3I$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} = -9$$

$III \leftarrow III - \frac{1}{2} II$

Data $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, una **sottomatrice** è una matrice ottenuta intersecando alcune righe ed alcune colonne di A.

Minore: sottomatrice quadrata.

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, dato un elemento a_j^i di A, il suo minore complementare M_j^i è quello ottenuto intersecando tutte le righe tranne la i-esima con tutte le colonne tranne la j-esima (cioè cancellando la riga i e la colonna j)

Cofattore o complemento algebrico di a_j^i è il numero

$$A_j^i = (-1)^{i+j} |M_j^i|$$

TEOR (di Laplace)

Per i fissato,

$$\det A = \sum_{t=1}^{n} a^i_t A^i_t = \sum_{t=1}^{n} a^t_i A^t_i$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a^2_1 A^2_1 + a^2_2 A^2_2 + a^2_3 A^2_3 =$$

$$= 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-3)(-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-24) + (-15) + 3(-6) =$$

$$= -9$$

$$|A| = 0 \cdot \left| \quad \right| + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 5(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2 \cdot 7 + 5 \cdot 1 = -9$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$\underline{III} \leftarrow \underline{III} - 3\underline{II}$

$$= 0 + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -(14-5) = -9$$

PROP - Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ $\det A \neq 0$. Allora la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\!\left(A^{\#}\right) \text{ dove}$$

$$A^{\#} = \left(A^i_j\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 1 \\ 24 & -15 & 6 \\ -11 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 10 & 24 & -11 \\ -7 & -15 & 5 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \mathrm{III} \leftarrow \mathrm{III} - 3\,\mathrm{I}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \mathrm{III} \leftarrow \mathrm{III} - 2\,\mathrm{II}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & -2 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \mathrm{III} \leftarrow -\frac{1}{9}\,\mathrm{III}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{6}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad II \leftarrow II - 7III$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ \frac{7}{9} & \frac{15}{9} & -\frac{5}{9} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{6}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad I \leftarrow I + 3III$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{9} & -\frac{9}{9} & \frac{6}{9} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{7}{9} & \frac{15}{9} & -\frac{5}{9} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{6}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad I \leftarrow I - II$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{10}{9} & -\frac{24}{9} & \frac{11}{9} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{9} & \frac{15}{9} & -\frac{5}{9} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{6}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$