$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 0 \\ -6 & 9 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 7 & 2 \\ -6 & 9 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II} \leftarrow \mathrm{II} + 3\,\mathrm{I}$$
$$\mathrm{III} \leftarrow \mathrm{III} + \mathrm{I}$$
$$\mathrm{IV} \leftarrow \mathrm{IV} + 3\,\mathrm{I}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{III} \leftarrow \mathrm{III} - \mathrm{II}$$
$$\mathrm{IV} \leftarrow \mathrm{IV} - 2\,\mathrm{II}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 2$$

Dato in A un minore M ottenuto intersecando certe h righe con certe h colonne di A, un minore M' viene detto orlato di M se è ottenuto intersecando le stesse h righe più una con le stesse h colonne più una.

TEOR (Kronecker) – $r(A) = h$ $\iff$ 1) $\exists$ minore M di ordine h con $|M| \neq 0$
e 2) ogni orlato M' di M ha det $= 0$.

PROP – Se $r(A) = h$, allora tutti i minori di ordine $> h$ hanno det $= 0$.

OSS - Nella situazione del teor, le colonne di A da cui è estratta M sono linearmente indipendenti e le altre sono loro combinazioni lineari. Idem per le righe.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 0 \\ -6 & 9 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 7 & 2 \\ -6 & 9 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad |M| \neq 0$

$$|O_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_3| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 2 \\ 9 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_4| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_5| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & -10 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_6| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 15 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rho(A) = 2$$

Sistema lineare: coppia (A, b) dove $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ matrice incompleta

$b = M_{m \times 1}(\mathbb{K})$
colonna dei termini noti

Soluzione del sistema (se esiste): una n-pla $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tale che sia $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$.

Il sistema si dice possibile

se ne esiste almeno una soluzione, impossibile altrimenti, determinato se la soluzione è unica, indeterminato se ci sono più soluzioni

TEOR (Rouché-Capelli)

(A, b) è possibile $\Leftrightarrow r(A) = r(C)$

matrice completa ottenuta aggiungendo ad A la colonna b.