$$\begin{cases} x + y - z - 4t = 1 \\ x - y + z + 4t = -4 \\ y + z - t = 1 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}^4$$

lo si discuta ed eventualmente risolva

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y - z - 4t = 1 \\ y + z - t = 1 \\ 4z + 6t = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \\ y = 1 + \frac{3+6\alpha}{4} + \alpha \\ z = \frac{-3-6\alpha}{4} \\ t = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{7+10\alpha}{4} + \frac{-3-6\alpha}{4} + 4\alpha \\ y = \frac{7+10\alpha}{4} \\ z = \frac{-3-6\alpha}{4} \\ t = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-6 + 0\alpha}{4} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{6}{4} \\ y = \dfrac{7+10\alpha}{4} \\ z = \dfrac{-3-6\alpha}{4} \\ t = \alpha \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \leq rA \leq rC \leq 3$$

$$|O_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$3 = rA = rC$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 + 4\alpha \\ x - y + z = -4 - 4\alpha \\ \quad\ y + z = 1 + \alpha \end{cases}$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\alpha \\ -4 - 4\alpha \\ 1 + \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 + 4\alpha \\ -4 - 4\alpha \\ 1 + \alpha \end{pmatrix}$$

Trasformazioni lineari

$T: V \to W$ si dice lineare

se $\forall v, v' \in V$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$T(v+v') = T(v) + T(v')$$

$$T(\alpha v) = \alpha \cdot T(v)$$

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \qquad V \xrightarrow{T} W \qquad \mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_m)$$

Costruiamo $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

La j-esima colonna di A è la m-pla di componenti di $T(e_j)$

Se $v =_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $T(v) =_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

allora $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Esempio $V = W = \{$polinomi in x, gr. $\leq 2\}$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}' = (1, x, x^2)$

$T : V \longrightarrow V$

$p(x) \longmapsto p(7) + p(3)x + p(2)x^2$

Cerco la A che rappresenta T risp. a $\mathcal{B}$

$1 \longmapsto 1 + 1x + 1x^2 =_{\mathcal{B}} (1,1,1)$

$x \longmapsto 7 + 3x + 2x^2 =_{\mathcal{B}} (7,3,2)$

$x^2 \longmapsto 49 + 9x + 4x^2 =_{\mathcal{B}} (49,9,4)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 49 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

TEOR (fondamentale delle trasf. lin.)

Sia $\mathcal{B}$ una base di V.
Sia data un'applicazione

$$\varphi : \mathcal{B} \to W$$

Allora $\exists!\, T : V \to W$ lineare tale che $T|_{\mathcal{B}} = \varphi$

PROBLEMA: Siano date basi $\mathcal{B}$ in V, $\mathcal{B}'$ in W.
Siano $v_1 \equiv_{\mathcal{B}} (1,5)$ $v_2 \equiv_{\mathcal{B}} (1,4)$,

$w_1 \equiv_{\mathcal{B}'} (1,0,2)$, $w_2 \equiv_{\mathcal{B}'} (0,1,-1)$.

a) Verificare che $\overline{\mathcal{B}} = (v_1, v_2)$ è una base di V

b) Scrivere, rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, la matrice A che rappresenta $T : V \to W$ per cui $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad |X| = -1 \neq 0 \quad \checkmark$

b) $$A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{Y} \qquad A \underbrace{X \cdot X^{-1}}_{I_2} = Y \cdot X^{-1}$$

$$A = Y \cdot X^{-1} \qquad X^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \\ -13 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v} =_{\mathcal{B}} (1, 2) \qquad T(\bar{v}) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \\ -13 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Sottospazio vettoriale di uno sp.v. V: $U \subset V$ tale che U, con le restrizioni delle operazioni di V, costituisca esso stesso sp.vett.

PROP- $U \subset V$ costituisce sottosp. vett. $\Leftrightarrow$ U è chiuso risp. a $+$ e $\cdot$:

$\forall u_1, u_2 \in U \quad u_1 + u_2 \in U$

$\forall u_1 \in U \; \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha u_1 \in U$

Rappresentazione cartesiana di U sottosp. v. di V risp. alla base $\mathcal{B}$:

U viene rappresentato come sp. delle soluzioni di un sist. lineare omogeneo, quindi come nucleo di un'opportuna trasf. lin. con dominio V.

Esempio: in $\mathbb{R}^5$

$$U: \begin{cases} x - y - z + t + u = 0 \\ x + 2z - u = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\det \neq 0 \quad \varrho A = 2$

$\dim U = 5 - 2 = 3$

$$T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z,t,u) \longmapsto (x-y-z+t+u,\ x+2z-u)$$

Dalla costruzione della matrice associata a una trasf. lin. ho che le colonne di A rappresentano un sistema di generatori di $\operatorname{Im} T$.
Perciò $\varrho A = \dim \operatorname{Im} T$

TEOR - $T : V \to W$ lin.
$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

COR - $\dim \operatorname{Ker} T = n - \varrho A$

COR - T è suriettiva $\iff \varrho A = m$
T è iniettiva $\iff \varrho A = n$

Rappresentazione parametrica di U: si presenta U come immagine di un'opportuna trasf. lin. con U come codominio:

$$S: \mathbb{R}^3 \longrightarrow U$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & & - \\ - & & \\ - & - & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad U = \operatorname{Im} S$$

$$U: \begin{cases} \boxed{x - y} - z + t + u = 0 \\ \boxed{x} + 2z - u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \alpha - \beta - \gamma \\ x = -2\alpha + \gamma \\ z = \alpha \\ t = \beta \\ u = \gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2\alpha + \gamma \\ y = -2\alpha + \gamma - \alpha + \beta + \gamma \\ z \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2\alpha + \gamma \\ y = -3\alpha + \beta + 2\gamma \\ z = \alpha \\ t = \beta \\ u = \gamma \end{cases}$$

$$\underset{5 \times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}} = \underset{5 \times 3}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{3 \times 1}{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}$$

Esercizio: dati in V, rispetto a una base $\mathcal{B}$, i vettori

$$u \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

scrivere forme cart. e param. minime di $U = \mathcal{L}(\{u, v, w\})$