Ricordo che un sottospazio affine è un insieme $\mathcal{H}$ di punti traslato di un sotto-spazio vettoriale $\vec{\mathcal{H}}$ detto giacitura di $\mathcal{H}$.

Dati sottospazi affini $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ con $\dim \mathcal{H} \leq \dim \mathcal{H}'$, diciamo che sono paralleli se $\vec{\mathcal{H}} \subseteq \vec{\mathcal{H}'}$.

Iperpiano: sottospazio di $\dim = n-1$ ($n = \dim$ dello spazio ambiente)

Tipica rappresentazione cartesiana di un iperpiano affine

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$$

Rappresentazioni di una retta in $\mathbb{A}^n$

$$r: \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} \underbrace{(\alpha)}_{1\times 1} + \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

$\vec{r}:$

coefficienti direttori di r

Forma cartesiana (minima) di una retta in $\mathcal{A}^n$:

$$r: \begin{cases} a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n = b_1 \\ \dots \\ a_1^{n-1} x_1 + \dots + a_n^{n-1} x_n = b_{n-1} \end{cases}$$

$$\vec{r}: \begin{cases} a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n = 0 \\ \dots \\ a_1^{n-1} x_1 + \dots + a_n^{n-1} x_n = 0 \end{cases}$$

Metodo spiccio per risolvere un sist. di $n-1$ eq. lin. omogenee (indipendenti) in n incognite.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (n-1) \times n$$

Minore M_j: quella ottenuta cancellando la colonna j.

PROP. La generica soluzione è

$$\alpha\left(|M_1|, -|M_2|, |M_3|, \dots, (-1)^{n-1}|M_n|\right).$$

Esempio: voglio trovare i coeff. dir. di

$$r: \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ x + y - 5z = 1 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(l_1, l_2, l_3) \sim \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (7, 8, 3).$$

Rappresentazione frazionaria di una retta di $\mathbb{R}^n$

$$\frac{x_1 - \overline{x}_1}{l_1} = \frac{x_2 - \overline{x}_2}{l_2} = \dots = \frac{x_n - \overline{x}_n}{l_n}$$

tutti $\neq 0$

$$\frac{x_1-\overline{x}_1}{l_1}=\frac{x_2-\overline{x}_2}{l_2}=\dots=\frac{x_n-\overline{x}_n}{l_n}=\alpha$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1-\overline{x}_1}{l_1}=\alpha \\ \vdots \\ \dfrac{x_n-\overline{x}_n}{l_n}=\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=l_1\alpha+\overline{x}_1 \\ \vdots \\ x_n=l_n\alpha+\overline{x}_n \end{cases}$$

Spazio vettoriale euclideo:

$(V, \langle\,,\rangle)$

V: sp. vett. reale

$\langle\,,\rangle$: prodotto scalare (forma bilineare simmetrica definita positiva)

v **ortogonale** a v' $\overset{def}{\iff}$ $\langle v, v'\rangle = 0$

Spazio euclideo:

(V, V, τ)

V: sp. vett. euclideo

Riferimento cartesiano di uno spazio euclideo:

$\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$

base ortonormale

~~Due~~ In gen rette r, r' si dicono ortogonali se i vettori liberi di r sono ortogonali ai vettori liberi di r'.

Una retta r e un iperpiano Π si dicono ortogonali se $\vec{r}$ è il complemento ortogonale di $\vec{\Pi}$.

Due iperpiani Π, Π' si dicono ortogonali se una retta ortogonale a Π e una retta ortogonale a Π' sono fra loro ortogonali.

Sp. affine $\mathcal{A}^n$	Sp. euclideo $\mathcal{E}^n$
Rif. affine	Rif. cartesiano

retta r di coeff. dir $(l_1, \dots, l_n)$
" r' " " " $(l'_1, \dots, l'_n)$
iperpiano π di eq. $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$
" π' " " $a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = b'$

$r \parallel r' \iff (l_1, \dots, l_n) \sim (l'_1, \dots, l'_n)$	$r \perp r' \iff l_1l'_1 + \dots + l_nl'_n = 0$
$r \parallel \pi \iff a_1l_1 + \dots + a_nl_n = 0$	$r \perp \pi \iff (l_1, \dots, l_n) \sim (a_1, \dots, a_n)$
$\pi \parallel \pi' \iff (a_1, \dots, a_n) \sim (a'_1, \dots, a'_n)$	$\pi \perp \pi' \iff a_1a'_1 + \dots + a_na'_n = 0$

$\mathcal{A}^n$ **Trasformazione affine**:
$\alpha : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$, fissato un rif. affine, rappresentata:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underset{n\times n}{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Affinità: trasf. affine biiettiva, quindi con $\det A \neq 0$

Sp. euclideo $\mathcal{E}^n$ Congruenza:
$\alpha: \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$, risp. a un rif. cartes.
rappresentata da

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underset{\uparrow \text{ ortogonale}}{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Congruenza diretta o movimento:
congruenza con $\det A = 1$

In $\mathcal{E}^3$ $\pi: x - 5y + 2z = 1$
Trovare la retta r per $P \equiv (10, 20, 30)$
$\perp \pi$.

$$r: \frac{x-10}{1} = \frac{y-20}{-5} = \frac{z-30}{2}$$

Trovare il piano π' per P,
$\parallel \pi$

Generico piano per P:

$$a(x-10)+b(y-20)+c(z-30)=0$$

$\parallel$: $(a,b,c)\sim(1,-5,2)$

$$\pi': 1(x-10)-5(y-20)+2(z-30)=0$$

$$\boxed{x-5y+2z+30=0}$$

In $\mathcal{E}^2$ retta r: $2x-3y=7$

Trovare la retta r' per $P\equiv(10,20)$ $\perp r$

$$r': \frac{x-10}{2}=\frac{y-20}{-3}$$

Trovare r'' per P, $\parallel r$

Generica retta per P:

$$a(x-10)+b(y-20)=0$$

$\parallel$: $(a,b)\sim(2,-3)$

$$2(x-10)-3(y-20)=0$$

$$2x-3y+40=0$$

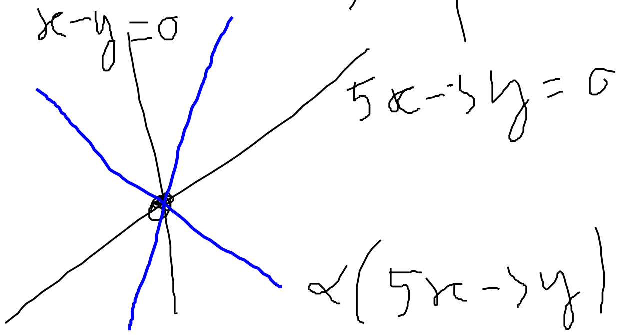
In $\mathcal{A}^n$ sia $\mathcal{A}'$, di dim $= n-2$, rappresentato da:

$$\begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0 \\ c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d = 0 \end{cases}$$

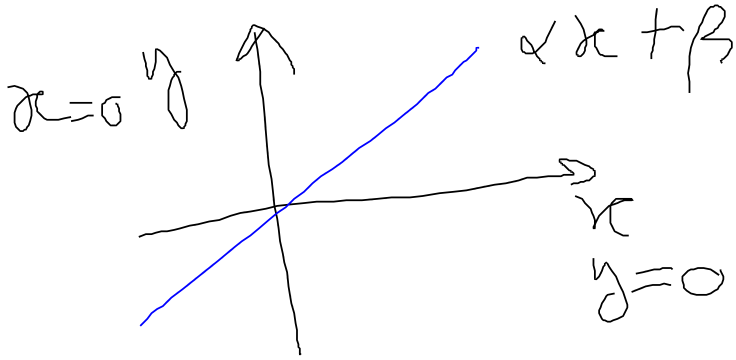
Fascio di iperpiani per $\mathcal{A}'$: l'insieme di tutti gli iperpiani contenenti $\mathcal{A}'$

PROP- Il generico iperpiano del fascio per $\mathcal{A}'$ ha equazione

$$\alpha(a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b) + \beta(c_1x_1 + \dots + c_nx_n + d) = 0$$



$$\alpha(5x-3y) + \beta(x-y) = 0$$



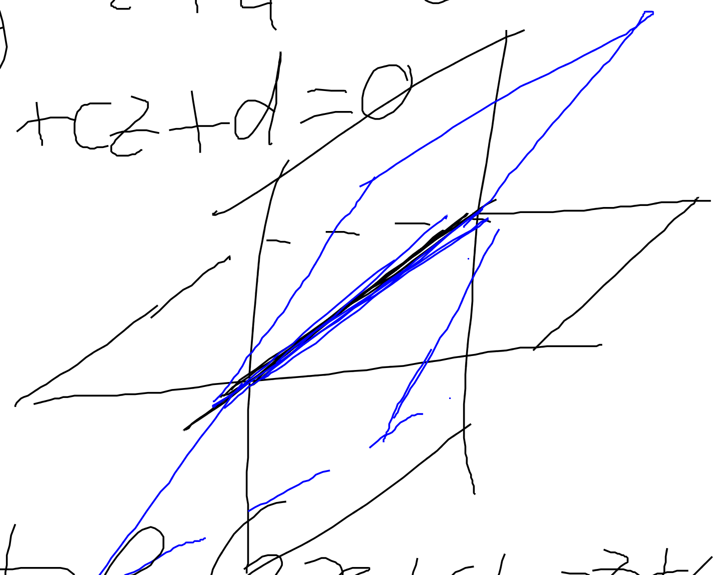
$$\alpha x + \beta y = 0 \qquad \beta \neq 0$$

$$y = mx$$

$$m = -\frac{\alpha}{\beta}$$

ut^{3} π :

$$\begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + 6y - z + 4 = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$



$$\alpha(x - y + z - 3) + \beta(2x + 6y - z + 4) = 0$$