In $\mathbb{R}P^2$ (sp. proiettivo $P(\mathbb{R}^3)$ associato ad $\mathbb{R}^3$) siano dati i punti

$A=[(1,2,3)]$, $B=[(1,1,1)]$, $C=[(2,3,4)]$

Trovare il sottospazio $\mathcal{P}'$ generato da A,B,C in forma cartesiana

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

$\mathcal{P}'$: impongo rango 2 (perciò $\det=0$) a

$$\begin{pmatrix} X_0 & 1 & 1 \\ X_1 & 2 & 1 \\ X_2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}': \ -X_0+2X_1-X_2=0$$

$$\begin{tikzcd}
\underline{v} \arrow[d, mapsto] & V \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{P} \arrow[d] & P \arrow[d, mapsto] \\
(x_0,\dots,x_n) & \mathbb{R}^{n+1} & \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}) & [(x_0,\dots,x_n)]
\end{tikzcd}$$

In una retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ rispetto a un rif. proiettivo $S = (A_0, A_1, U)$ siano

$B_0 \equiv_S (1,2)$, $B_1 \equiv_S (4,9)$, $\overline{U} \equiv_S (1,1)$.

a) Si verifichi che $\overline{S} = (B_0, B_1, \overline{U})$ è un riferimento proiettivo

b) Si trovi una base $\mathcal{B}$ normalizzata rispetto ad $\overline{S}$

c) Dato il punto $P \equiv_S (10,15)$ se ne trovino le coordinate rispetto ad $\overline{S}$

---

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\overline{S}$ è un rif pro.

b) rispetto a una base $\mathcal{B}$ normalizzata rispetto ad

S ci sono vettori

$w_0 \equiv (1,2)$, $w_1 \equiv (4,9)$, $\overline{w} \equiv (1,1)$

Una base $\overline{\mathcal{B}}$ normalizzata rispetto ad $\overline{S}$ sarà formata

da $\overline{w_0} = \alpha w_0$ e $\overline{w_1} = \beta w_1$

tali che sia $(\overline{w_0} + \overline{w_1}) \sim \overline{w}$

quindi dobbiamo trovare

α, β t.c.

$\alpha(1,2) + \beta(4,9) \sim (1,1)$

scelgo fattore di prop. $= 1$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 1 \\ 2\alpha + 9\beta = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + 4\beta = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 - 4\beta = 5 \\ \beta = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$\overline{w}_0 = 5 w_0 \qquad \overline{w}_1 = -1 w_1$

$\overline{\mathcal{B}} = (\underbrace{\overline{w}_0}_{=_{\mathcal{B}}(5,10)}, \underbrace{\overline{w}_1}_{=_{\mathcal{B}}(-4,-9)})$

c) $P \equiv_{S} (10,15)$ significa che per un suo rappresentante $\overline{v}$ vale $\overline{v} \equiv_{\mathcal{B}} (10,15)$

Cerco $\overline{x}_0, \overline{x}_1$ per cui $P \equiv_{\overline{S}} (\overline{x}_0, \overline{x}_1)$

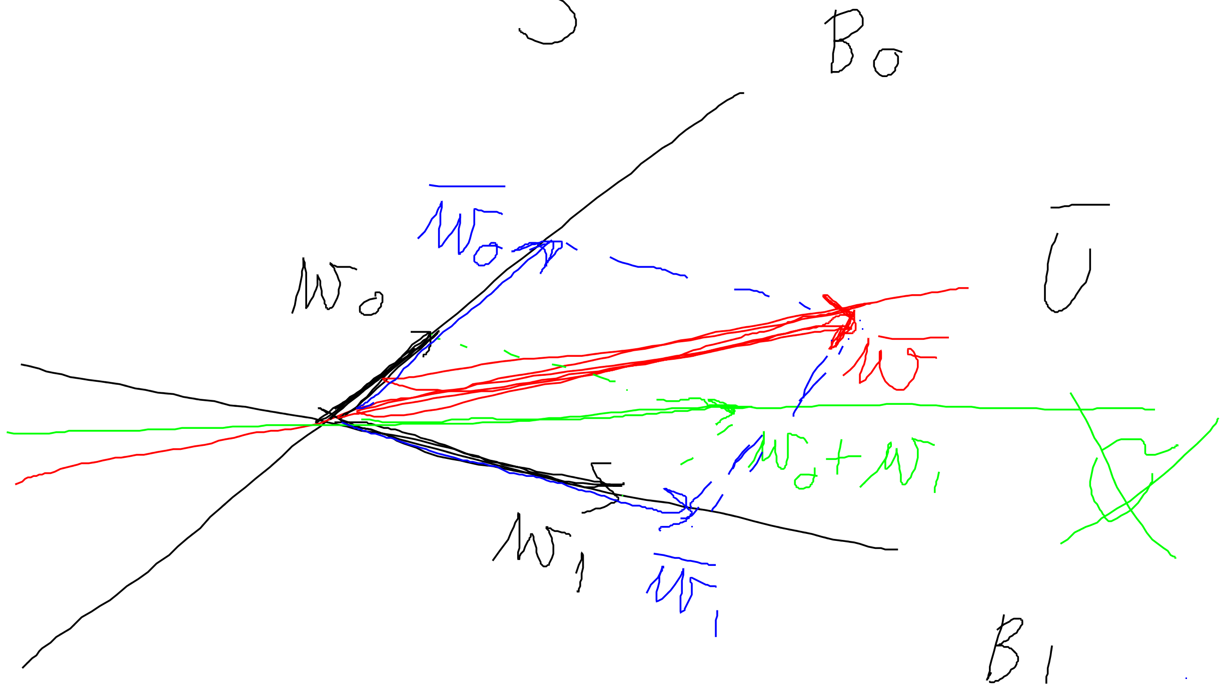
Queste sono le componenti di $\overline{v}$ rispetto a $\overline{\mathcal{B}}$, cioè

$$x_0 \cdot (5,10) + x_1 \cdot (-4,-9) = (10,15)$$

$$\begin{cases} 5x_0 - 4x_1 = 10 \\ 10x_0 - 9x_1 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_0 - 4x_1 = 10 \\ \qquad\;\; -x_1 = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_0 = 10 + 4x_1 = 30 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 6 \\ x_1 = 5 \end{cases} \qquad P \equiv_{S} (6, 5)$$



---

r, r' rette proiettive, S, S' loro riferimenti proiettivi

In $\mathbb{P}$ siano

$B_0 \equiv_S (1,2)$, $B_1 \equiv_S (4,9)$, $\bar{U} \equiv_S (1,1)$

In $\mathbb{P}'$ siano

$B_0' \equiv_{S'} (1,3)$, $B_1' \equiv_{S'} (1,4)$, $\bar{U}' \equiv_{S'} (2,4)$

a) si verifichi che

$\bar{S} = (B_0, B_1, \bar{U})$ ed $\bar{S}' = (B_0', B_1', \bar{U}')$

sono rif. proiettivi di $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}'$

rispettivamente.

b) Si scriva, rispetto ad S ed S', la rappresentazione matriciale della proiettività

$$\omega : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$$

tale che sia

$\omega(B_0) = B_0'$, $\omega(B_1) = B_1'$, $\omega(\bar{U}) = \bar{U}'$

c) Dato il punto $F \equiv_S (10,15)$ si trovino, rispetto ad S', le coordinate proiettive di $\omega(F)$