Endomorfismo

$$T : V \longrightarrow V$$

Per ogni $\lambda \in K$ sia

$$U_\lambda = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \}$$

U_λ è sempre sottosp. vett., ma il più delle volte è $\{\bar{0}_V\}$

λ autovalore di T se U_λ non si riduce al vettore nullo. Allora U_λ è detto autospazio e i suoi elementi autovettori relativi a λ.

Rispetto a una base $\mathcal{B}$, sia $A = M_{\mathcal{B}}(T)$

Allora $\forall \lambda \in K$

$$U_\lambda : (\lambda I_n - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

perché $T(v) = \lambda v$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Perciò, affinché λ sia autovalore, occorre che quel sistema abbia rango $< n$, perciò

PROP

λ autovalore $\iff |\lambda I_n - A| = 0$

Metto un'indeterminata t qua:

$$|t I_n - A|$$

risulta essere un polinomio in t, di grado n, detto polinomio caratteristico di A e di T.

COR - λ autovalore

$\Updownarrow$

λ è radice del pol. caratt.

$$t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

$a_{n-1} = -\mathrm{Tr} A = -\sum_{i=1}^{n} a_i^i$

$a_0 = (-1)^n \det A$

Dato un polinomio $p(t)$,

TEOR (Ruffini) -

$p(\alpha) = 0 \iff \exists\, q(t)$ polin. t.c. $p(t) = (t-\alpha)\, q(t)$

α è radice di $p(t)$

DEF - α è radice di $p(t)$ di molteplicità esattamente s

Se $p(t) = (t-\alpha)^s \cdot q(t)$,
dove $q(\alpha) \neq 0$

DEF - Molteplicità algebrica di un autovalore λ: la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

DEF - Molteplicità geometrica di un autovalore λ:
$\dim U_\lambda$.

PROP - $mg(\lambda) = n - \rho(\lambda I_n - A)$

PROP -
$$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$$

DEF - $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si dicono simili se $\exists E \in GL_n(\mathbb{K})$ ($|E| \neq 0$)
t.c. $B = E^{-1} \cdot A \cdot E$

PROP - A, B sono simili $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ rappresentano uno stesso endomorfismo rispetto a basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

PROP - A simile a B $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ pol. car. (A) = pol. car. (B)

COR - A simile a B $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ det A = det B

COR - A simile a B $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Tr A = Tr B

COR - A simile a B $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ gli autovalori di A sono uguali agli autovalori di B, con le stesse molteplicità algebriche e geometriche

DEF - A si dice diagonalizzabile per similitudine se $\exists$ una matrice diagonale D t.c. A è simile a D.

TEOR (T. spettrale)

A diagonalizzabile per simil.

$$\Updownarrow$$

$\exists$ una base di V spettrale (cioè formata da autovettori)

$$\Updownarrow$$

$$\sum_i mg(\lambda_i) = n$$

TEOR - Ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile per similitudine.