

Forma bilineare su V :

$$\varphi: V \times V \rightarrow K$$

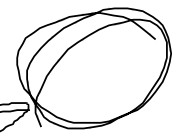
tales che $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha \in K$

$$\varphi(u+v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$$

$$\varphi(u, v+w) = \varphi(u, v) + \varphi(u, w)$$

$$\varphi(\alpha u, v) = \alpha \varphi(u, v) = \varphi(u, \alpha v)$$

PROP - $\varphi: K^n \times K^n \rightarrow K$

risulta bilineare \iff  una

funzione polinomiale omogenea di 1° grado nelle x_i e di 1° grado nelle x'_i o nulla

Esempio:

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto 3xx' - 2xy' + 6yx' + 18zy' + 5zz'$$

DEF - La forma bilineare φ si dice **simmetrica** se $\forall u, v \in V$
$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

Forma quadratica su V :

$q: V \rightarrow \mathbb{K}$ t.c. $\exists \varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$
bilineare per cui $\forall v \in V$
 $q(v) = \varphi(v, v)$.

PROP - $q: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto$



risulta quadratica \Leftrightarrow è polinomio
omogeneo di 2° grado nelle
 x_1, \dots, x_n o nulla

$$\begin{array}{l} 3xx' - 2xy' + 6yx' + \\ + 8zy' + 5zz' \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{f. bil.} \\ \downarrow \end{array} \right\}$$

f. quadr

$$3xx - 2xy + 6yx + 8zy + 5zz$$

$$3x^2 + 4xy + 8yz + 5z^2$$

DEF - Data una forma bilineare $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, data una base ordinata $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ di V , la **matrice di Gram** di φ rispetto a \mathcal{B} è:

$$G = (g_{ij}) = (\varphi(e_i, e_j))$$

PROP - Se $u = (x_1, \dots, x_n)$, $v =_{\mathcal{B}} (x'_1, \dots, x'_n)$, allora

$$\varphi(u, v) = (x_1, \dots, x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

PROP - φ simmetrica $\Leftrightarrow G$ simmetrica

$$3xx' - 2xy' + 6yx' + 8zy' + 5zz'$$

$$B = \left(\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{matrix} \right)$$

$$\varphi(e_1, e_1) = 3 \quad \varphi(e_1, e_2) = -2$$

$$3x^2 - 2xy + 6yx + 8zy + 5z^2$$

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ 3 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

PROP - Data una forma quadratica q , $\exists!$ forma bilineare simmetrica φ ad essa associata; detta **forma polare** di q

$$3x^2 + 4xy + 8yz + 5z^2$$

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

DEF - **Matrice di Gram** della forma quadratica: la matr. di Gram della

sua forma palare.

DEF - Date $A, B \in M_n(\mathbb{K})$
simmetriche, le dico

congruenti se $\exists E \in GL_n(\mathbb{K})$
t.c. $B = {}^t E \cdot A \cdot E$

PROP - A, B risultano congruenti \Leftrightarrow sono metrici di Gram
di una stessa forma quadratica
rispetto a basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' .

Se A è diagonalizzabile
per similitudine e D è
diagonale e simile ad A ,
allora sulla diagonale prin.
di D si trovano gli auto-
valori di A (e di D), ognuno
ripetuto tante volte quanti è
la sua molteplicità (alge-
brica = geometrica).

$$D = E^{-1} \cdot A \cdot E$$

E è la matrice del cambiamento di base da una base spettrale alla base rispetto a cui è scritta A .

Se A è simmetrica, la matrice E può essere scelta ortogonale, cioè
t.c. $E^{-1} = {}^t E$.

Ma allora D è non solo simile ma anche congruente ad A .

PRCP - Ogni matrice simmetrica ammette una

matrice diagonale Δ di essa
congruente, che ha sulla
diag. princ. gli autovalori
di A (ripetuti ecc ecc).