Forma bilineare su V:

$\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$

tale che $\forall\, u, v, w \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$\varphi(u+v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$$
$$\varphi(u, v+w) = \varphi(u, v) + \varphi(u, w)$$
$$\varphi(\alpha u, v) = \alpha \varphi(u, v) = \varphi(u, \alpha v)$$

PROP - $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) \mapsto \bigcirc$

risulta bilineare $\iff$ è una funzione polinomiale omogenea di 1° grado nelle x_i e di 1° grado nelle x'_i o nulla

---

Esempio:

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto 3xx' - 2xy' + 6yx' + 8zy' + 5zz'$

DEF - La forma bilineare φ si dice simmetrica se $\forall\, u, v \in V$

$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$$

Forma quadratica su V:

$q: V \longrightarrow \mathbb{K}$ t.c. $\exists\, \varphi: V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare per cui $\forall\, v \in V$

$$q(v) = \varphi(v,v).$$

PROP- $q: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \bigcirc$

risulta quadratica $\Longleftrightarrow$ $\bigcirc$ è polinomiale omogenea di 2° grado nelle $x_1, \dots, x_n$ o nulla

---

$3xx' - 2xy' + 6yx' + 8zy' + 5zz'$

f. bil

$\Downarrow$

f. quadr

$$3xx - 2xy + 6yx + 8zy + 5zz$$

$$\| $$

$$3x^2 + 4xy + 8yz + 5z^2$$

DEF - Data una forma bilineare $\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$, data una base ordinata $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ di V, la **matrice di Gram** di φ rispetto a $\mathcal{B}$ è:

$$G = (g_{ij}) = (\varphi(e_i, e_j))$$

PROP - Se $u \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$, $v \equiv_{\mathcal{B}} (x'_1, \dots, x'_n)$, allora

$$\varphi(u, v) = (x_1 \dots x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

PROP - φ simmetrica $\iff$ G simmetrica

$3xx' - 2xy' + 6yx' +$
$+ 8zy' + 5zz'$

$\mathcal{B} = \left(\overset{e_1}{(1,0,0)}, \overset{e_2}{(0,1,0)}, \overset{e_3}{(0,0,1)} \right)$

$\varphi(e_1, e_1) = 3 \quad \varphi(e_1, e_2) = -2$ ___

___ ___ ___

___ ___ ___

$3xx' - 2xy' + 6yx' +$
$+ 8zy' + 5zz'$

$$\begin{array}{c|ccc} & x' & y' & z' \\ \hline x & 3 & -2 & 0 \\ y & 6 & 0 & 0 \\ z & 0 & 8 & 5 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

PROP – Data una forma quadratica q, $\exists!$ forma bilineare simmetrica φ ad essa associata; detta **forma polare** di q

$$3x^2 + 4xy + 8yz + 5z^2$$

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 3 & 2 & 0 \\ y & 2 & 0 & 4 \\ z & 0 & 4 & 5 \end{array}$$

DEF – **Matrice di Gram** della forma quadratica: la matr. di Gram della sua forma polare.

DEF - Date $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ simmetriche, le dico congruenti se $\exists E \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = {}^tE \cdot A \cdot E$

PROP - A, B risultano congruenti $\Leftrightarrow$ sono matrici di Gram di una stessa forma quadratica rispetto a basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Se A è diagonalizzabile per similitudine e D è diagonale e simile ad A, allora sulla diagonale prima di D si trovano gli autovalori di A (e di D), ognuno ripetuto tante volte quant'è la sua molteplicità (algebrica = geometrica).

$D = E^{-1} \cdot A \cdot E$

E è la matrice del cambiamento di base da una base spettrale alla base rispetto a cui è scritta A.

Se A è simmetrica, la matrice E può essere scelta ortogonale, cioè t.c. $E^{-1} = {}^tE$

Ma allora D è non solo simile ma anche congruente ad A.

PROP - Ogni matrice simmetrica ammette una matrice diagonale ad essa congruente, che ha sulla diag. princ. gli autovalori di A (ripetuti ecc ecc).