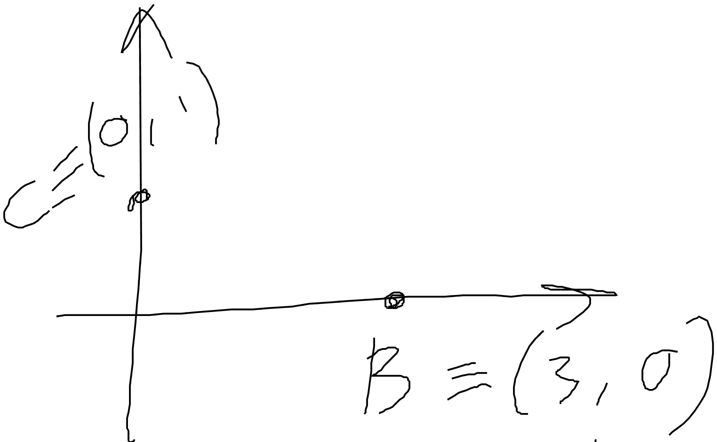


Trovare il fascio di coniche tangenti in B alla retta $y=0$ e in C alla retta $x=0$

$\Gamma_1 = xy = 0$

$\Gamma_2 = BC$ contata 2 volte

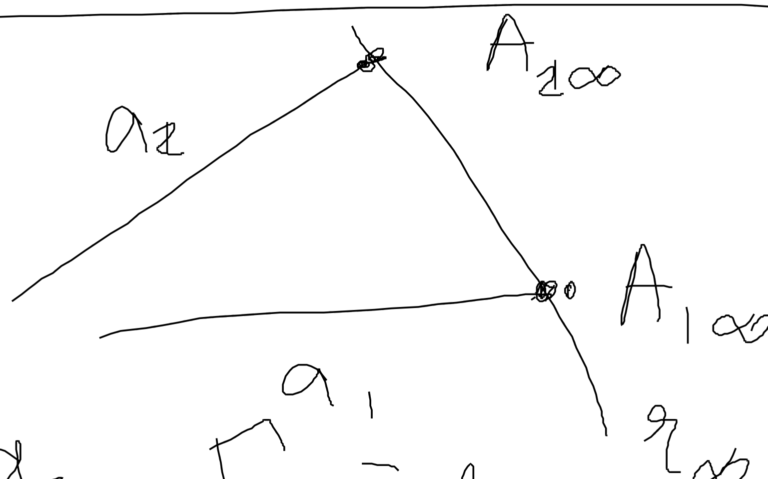
$$(x+3y-3)^2 = 0$$

$$\mathcal{F} : \lambda xy + \mu (x+3y-3)^2 = 0$$

Trovare il fascio di iperboli aventi asintoti

$a_1 : y = 0 \qquad X_2 = 0$

$a_2 : x - y = 0 \qquad X_1 - X_2 = 0$



$\Gamma_1 = a_1 \cup a_2 \qquad \Gamma_2 = a_\infty$ contata 2 volte

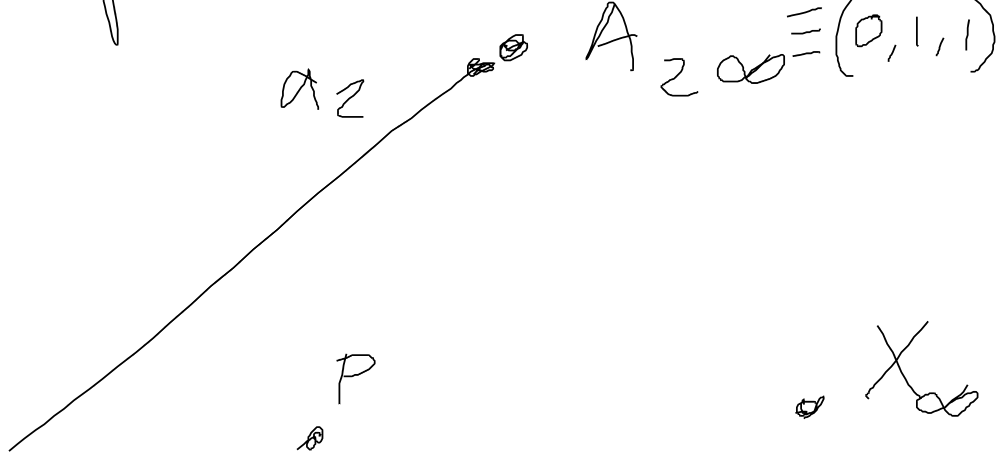
$X_2(X_1 - X_2) = 0 \qquad X_0^2 = 0$

$$\mathcal{F} : \lambda X_2(X_1 - X_2) + \mu X_0^2 = 0 \qquad \frac{1}{X_0^2}$$

$$\mathcal{F} : \lambda y(x - y) + \mu = 0$$

Es 15

Fascio di iperboli per $P \equiv (2,0)$, aventi $r: y = x$ come asintoto e l'altro asintoto parallela all'asse x. a_1



$\Gamma_1 = a_2 \cup PX_\infty$

$(X_1 - X_2)\,X_2 = 0$

$\Gamma_2 = PA_{2\infty} \cup r_\infty$

$\frac{x-2}{1} = \frac{y-0}{1}$

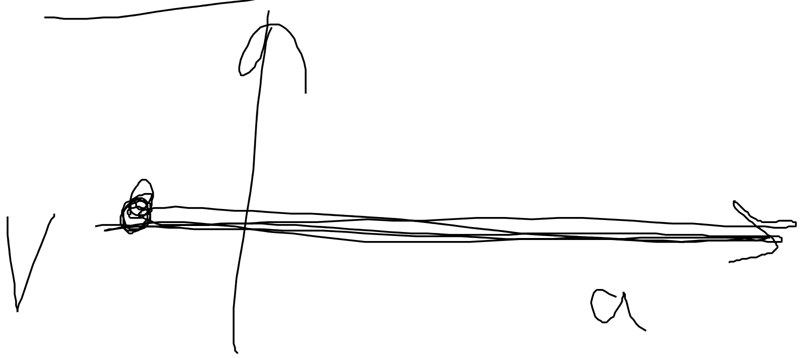
$(X_1 - X_2 - 2X_0)\,X_0 = 0$

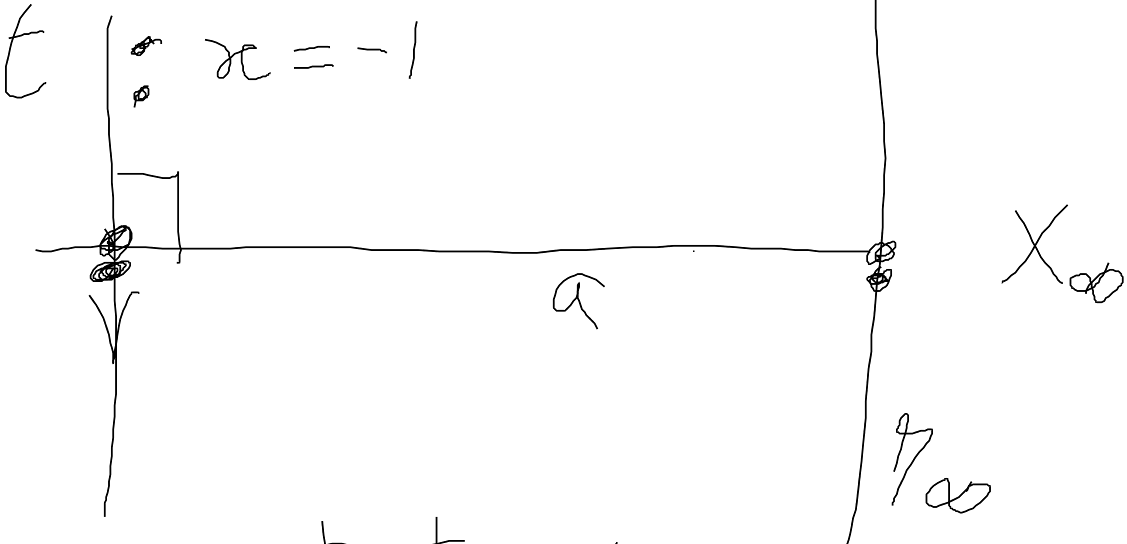
$\mathcal{F}: \lambda(X_1 - X_2)X_2 + \mu(X_1 - X_2 - 2X_0)X_0 = 0 \qquad \frac{1}{X_0^2}$

$$\boxed{\lambda(x-y)y + \mu(x-y-2) = 0}$$

Es. 21

Fascio di parabole con vertice $V \equiv (-1,0)$ e asse $a: y = 0$





Γ_1: a contato 2 volte

$X_2^2 = 0$

$\Gamma_2 = t \cup q_\infty$

$(X_1 + X_0) X_0 = 0$

$$f : \lambda x_2^2 + \mu(x_1 + x_0)x_0 = 0$$

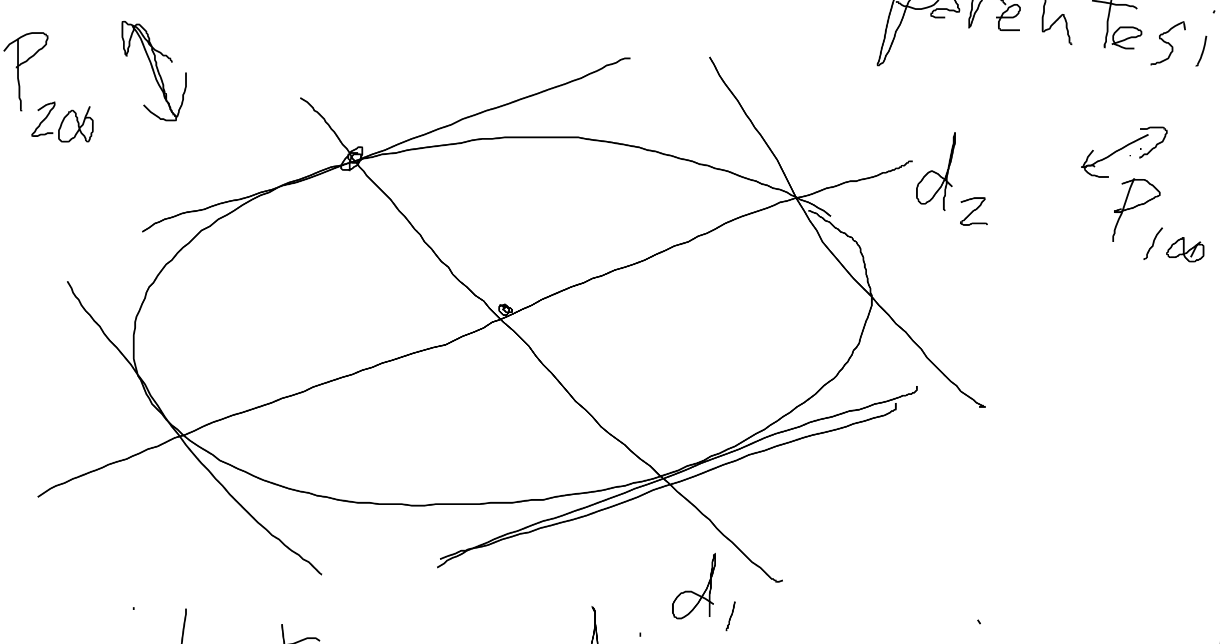
$$\lambda y^2 + \mu(x+1) = 0$$

Es. 1

Fascio di coniche a centro aventi asse $r : 2x+y-z=0$ e un vertice nell'origine

---

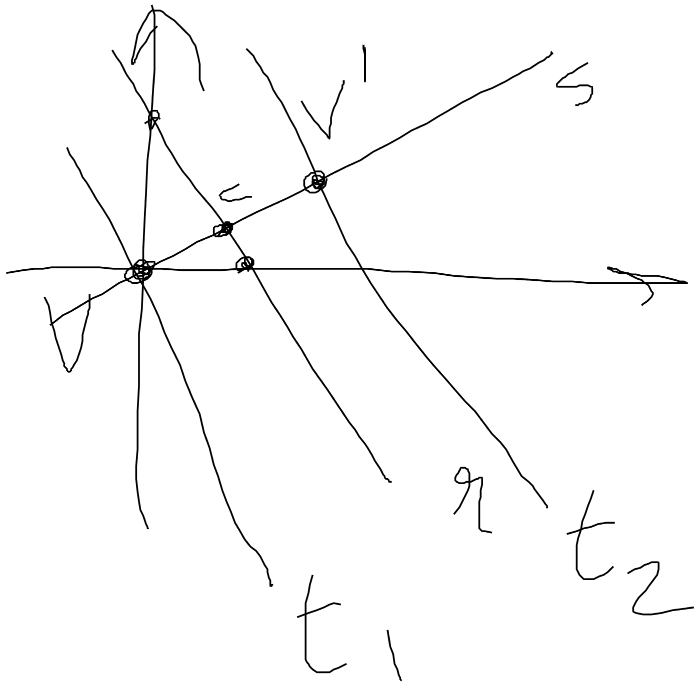
parentesi



Per il teor di reciprocità

il diametro d_2 passante per il polo $P_{1\infty}$ del diametro d_1 ha come polo il punto improprio $P_{2\infty}$ di d_1.
I due diametri si dicono coniugati, così come le direzioni rappresentate da $P_{1\infty}$ e $P_{2\infty}$.

Se una conica ha esattamente 2 assi, questi sono fra loro coniugati, quindi sono fra loro ortogonali



$r: 2x + y - 2 = 0$

$\Gamma_1 = t_1 \cup t_2$

$\Gamma_2 = s$ cont. 2 volte

$$s: \frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{1} \qquad s: x - 2y = 0$$

$$C: \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 5y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \qquad C \equiv \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$\frac{V + V'}{2} = C \qquad V' = 2C - V =$$

$$= \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) - (0, 0)$$

$$V' \equiv \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$t_1: 2x + y = 0$$

$t_2 \quad 2x+y+k=0$

$2\frac{8}{5}+\frac{4}{5}+k=0$

$k=-\frac{20}{5}=-4$

$t_2: 2x+y-4=0$

$\Gamma_1: (2x+y)(2x+y-4)=0$

$\Gamma_2: (x-2y)^2=0$

$\mathcal{F}: \lambda(2x+y)(2x+y-4)+\mu(x-2y)^2=0$

$\lambda(4x^2+4xy-8x+y^2-4y)+\mu(x^2+4y^2-4xy)=0$

Si trovi la conica di $\mathcal{F}$ rispetto a cui siano coniugati

Y_∞ ed $A\equiv(0,1)$

$h=\frac{\mu}{\lambda}$

$(4+h)x^2+4(1-h)xy+(1+4h)y^2-8x-4y=0$

$h=\frac{1}{4}$

Impongo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & (4+h) & 2(1-h) \\ -2 & 2(1-h) & (1+4h) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2(1-h) & (1+4h) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2+1+4h=0$$

$$4h=1$$

$$h=\frac{1}{4}$$

Es. 17

$r: y=0 \qquad s: y=2x$

$\Gamma: 2xy-y^2-2x+3y+4=0$

Fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per i punti d'intersezione di Γ con r e con s.

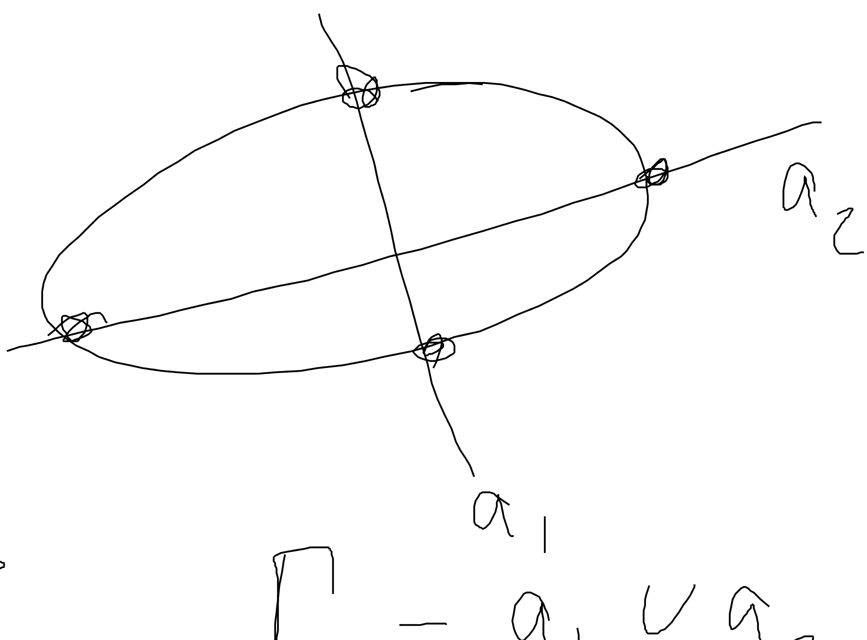
$\mathcal{F} : \lambda(2xy - y^2 - 2x + 3y + 4) + \mu\, y(y - 2x) = 0$

Es. 18

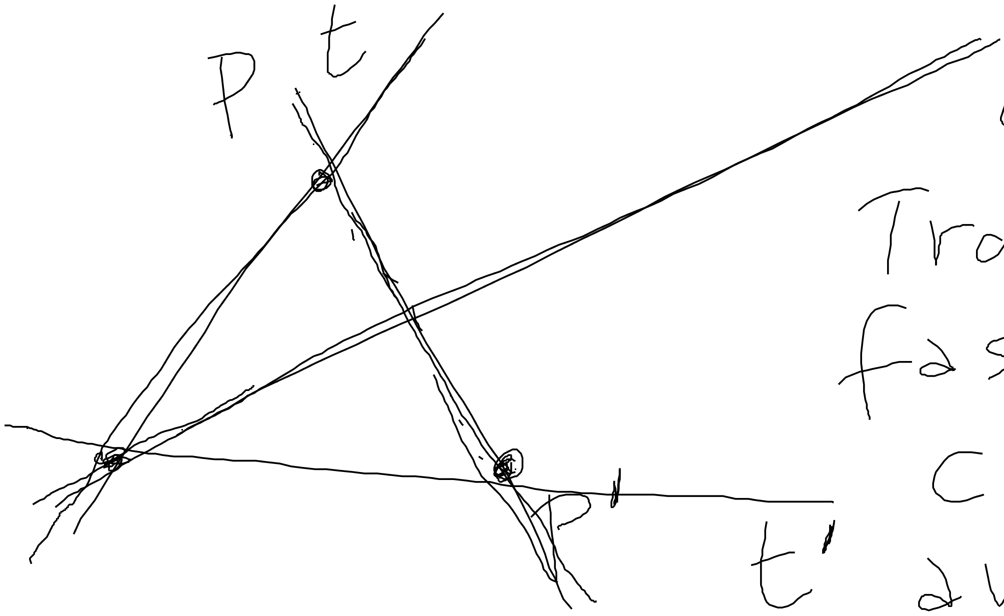
Data l'ellisse

$\mathcal{E} : 5x^2 + 5y^2 + 6xy + 10x + 6y - 11 = 0$

si scriva l'eq del fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per i vertici di $\mathcal{E}$



$\Gamma_1 = \mathcal{E}$ $\qquad$ $\Gamma_2 = a_1 \cup a_2$



Trovare il fascio di coniche aventi a come asse e tangenti in P a t

---

Estensione complessa di uno spazio (vettoriale, affine, euclideo, proiettivo) reale:
quello spazio a scalari complessi di cui lo spazio dato si può considerare come una parte, selezionata prendendo tutti i coeffi=

cienti e le coordinate a parte immaginaria nulla.

Punti e rette immaginari sono quelli non esprimibili con coordinate o coefficienti tutti reali.

Esempio:
la retta $ix - 2iy - 3i = 0$ è reale, perché esprimibile (dividendo per i) da $x - 2y - 3 = 0$

La retta $x - 2iy - 3 = 0$ è immaginaria.

Nel piano proiettivo il punto $P \equiv (i, 2i, 3i)$ è reale, perché esprimibile (dividendo per i) da $(1, 2, 3)$

Il punto $Q \equiv (i, 2, 3)$ è immaginario.

Prop:
Se interseco due "oggetti" espressi da equazioni a coefficienti reali, gli eventuali punti d'intersezione immaginari sono in coppie coniugate (nel

senso dei numeri complessi)

Ogni retta immaginaria contiene esattamente un punto reale

$$r : (a+bi)x + (c+di)y + e+fi = 0$$

$$\bar{r} : (a-bi)x + (c-di)y + e-fi = 0$$

$$r \cap \bar{r} : \begin{cases} 2ax + 2cy + 2e = 0 \\ 2ibx + 2idy + 2if = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + cy + e = 0 \\ bx + dy + f = 0 \end{cases}$$ rette reali

intersez. reale

Interseco una circonferenza con r_∞

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\begin{cases} X_1^2+X_2^2+\cancel{aX_1X_0+bX_2X_0+cX_0^2}=0 \\ X_0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1^2+X_2^2=0 \quad (X_1+iX_2)(X_1-iX_2) \\ X_0=0 \end{cases}$$

$$C_1=(0,1,i) \quad C_2=(0,1,-i)$$

Questi sono chiamati punti ciclici del piano e sono comuni a tutte le circonferenze.

Ogni conica (non deg) passante per i punti ciclici è una circonferenza