In x, y, z

$\Sigma : F(x, y) = 0$

$\bar{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \Sigma$

allora anche

$\tilde{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \tilde{z}) \in$

Perciò se Σ contiene $\bar{P}$, allora contiene tutta la retta per $\bar{P}$ e $\parallel$ asse z.

Σ è un cilindro con generatrici $\parallel$ asse z

$$\begin{cases} x = f(u) \\ y = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases} \qquad \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cos(u) \\ y = \sin(u) \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2=1$$

$$x^2+y^2 = (\cos(u))^2 + (\sin(u))^2 = 1$$

Metodo 1 per determinare se una curva $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x = f(u) \\ y = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$

è piana o no

Considero il generico piano dello spazio $F(x,y,z) = ax+by+cz+d=0$

e lo interseco con $\mathcal{C}$:

costruisco

$$\Phi(u) = F(f(u), \varphi(u), \psi(u)).$$

Impongo a $\Phi(u)=0$ di essere un'identità in u

Questo si esprime mediante condizioni su a, b, c, d. Se esiste una quaterna (a, b, c, d) con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, che soddisfa tali condizioni, tale quaterna ci dà il piano contenente $\mathcal{C}$. Se non esiste, allora $\mathcal{C}$ è sghemba.

Si verifichi se è piana la curva

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = u^3 - 6u^2 \\ y = 3u^2 \\ z = u^2 - 1 \end{cases}$$

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

$$\Phi(u) = a(u^3 - 6u^2) + b(3u^2) + c(u^2 - 1) + d$$

$$\Phi(u) = 0$$

$$a(u^3-6u^2)+b\cdot 3u^2+c(u^2-1)+d=0$$

$$a u^3+(-6a+3b+c)u^2-c+d=0$$

affinché quest'ultima sia un'identità in u (cioè ogni valore di u la soddisfi, quindi ogni punto di $\mathcal{E}$ sia anche di π) devono essere nulli i coefficienti di tutte le potenze di u:

$$\begin{cases} a=0 \\ -6a+3b+c=0 \\ -c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0 \\ 3b+c=0 \\ -c+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=-\alpha/3 \\ c=\alpha \\ d=\alpha \end{cases}$$

Scelgo $\alpha=3$

$$(a,b,c,d)=(0,-1,3,3)$$

Il piano che contiene $\mathcal{E}$ è

$$-y+3z+3=0$$

Verificare se è piana

$$C: \begin{cases} x = u^3 - u \\ y = u^2 - 1 \\ z = u + 2 \end{cases}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\Phi(u) = a(u^3 - u) + b(u^2 - 1) + c(u + 2) + d$$

$$0 = \Phi(u) = au^3 + bu^2 + (-a + c)u - b + 2c + d$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ -a + c = 0 \\ -b + 2c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$ sghemba

---

Es. 6 $\Sigma: \begin{cases} x = u^2 - uv \\ y = v \\ z = u - v^2 \end{cases}$

se ne trovi l'equazione cartesiana

$$\begin{cases} x = u^2 - uy \\ z = u - y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = u^2 - uy \\ u = z + y^2 \end{cases}$$

$$\Sigma : x - (z+y^2)^2 + (z+y^2)y = 0$$

Es. 12 $\quad \Sigma : \underbrace{x^4 - y^2 - z^2}_{F(x,y,z)\,=} = 0$

Trovare il piano tang. a Σ in $A \equiv (3, 9, 0)$

$$F_x = 4x^3 \qquad F_y = -2y \qquad F_z = -2z$$

$$A \qquad 108 \qquad -18 \qquad 0$$

$$\pi : 108(x-3) - 18(y-9) = 0$$

La normale a Σ in A:

$$\cancel{\frac{x-3}{108} = \frac{y-9}{-18} = \frac{z-0}{0}}$$

$$h : \begin{cases} \dfrac{x-3}{108} = \dfrac{y-9}{-18} \\ z = 0 \end{cases}$$