Circonferenza osculatrice a $\mathcal{C}$ in P: la circonferenza (dello spazio) che ha in P (semplice e ordinario) contatto di ordine almeno 2.

La circonferenza osculatrice è intersezione del piano osculatore a $\mathcal{C}$ in P con una delle ∞^1 sfere osculatrici a $\mathcal{C}$ in P

Queste sono le sfere che hanno in P contatto di ordine almeno 2 con $\mathcal{C}$ in P. Esse sono tutte e sole le sfere che passano per P e che hanno centro sulla normale $\bar{r}$ al piano osculatore, dove $\bar{r}$ passa per il centro della circonferenza osculatrice.

20/3/'09 Es 2 C

$O \leftrightarrow \alpha = 0$

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha^4 - \alpha^2 \\ z = \alpha^2 \end{cases}$$

Trovare

la circonferenza osculatrice a $\mathcal{C}$ in $O = (0,0,0)$

Piano osculatore in O:

	in O
$x' = 1$	1
$y' = 4\alpha^3 - 2\alpha$	0
$z' = 2\alpha$	0
$x'' = 0$	0
$y'' = 12\alpha^2 - 2$	-2
$z'' = 2$	2

$$\pi_0 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad -2y - 2z = 0$$

$$y + z = 0$$

Sfera osculatrice a C in O

Generica sfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$F(x, y, z) =$

Σ in O

$$\Phi(\alpha) = F(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) =$$

$$= \alpha^8 - 2\alpha^6 + b\alpha^4 + 2\alpha^4 + c\alpha^2 - b\alpha^2 + \alpha^2 + a\alpha + d$$

d

$$\Phi'(\alpha) = 8\alpha^7 - 12\alpha^5 + 4b\alpha^3 + 8\alpha^3 + 2c\alpha - 2b\alpha + 2\alpha + a$$

a

$$\Phi''(\alpha) = 56\alpha^6 - 60\alpha^4 + 12b\alpha^2 + 24\alpha^2 + 2c - 2b + 2$$

$2c - 2b + 2$

$$\begin{cases} \Phi(0) = c \\ \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(\alpha) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ a = 0 \\ 2c - 2b + 2 = 0 \\ c - b + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ a = 0 \\ c = k \\ b = k + 1 \end{cases}$$

$$Z_k: x^2 + y^2 + z^2 + (k+1)y + kz = 0$$

$$C_{osc} \begin{cases} y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + y = 0 \end{cases}$$

Voglio il raggio di curvatura? O uso una sfera osculatrice qualsiasi e ottengo il raggio della circonf. osc. dal teor. di Pitagora, oppure è il raggio di quella sfera osculatrice che ~~la~~ il centro sul piano osculatore

Nel nostro caso:

Centro di Σ_k

$C_k = \left(0, -\frac{k+1}{2}, -\frac{k}{2}\right)$

Impongo $C_k \in \Pi_0$ $y+z=0$

$-\frac{k+1}{2} - \frac{k}{2} = 0$

$\frac{-k-1-k}{2} = 0$ $2k = -1$

$C_{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ $k = -\frac{1}{2}$

$\Sigma_{-\frac{1}{2}}$: $x^2+y^2+z^2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=0$

Raggio: o dall'espressione della sfera o come distanza

$d(C_k, O) = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}-0\right)^2+\left(+\frac{1}{4}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}} = 1/2\sqrt{2}$

punto di osculazione