Lezione 23/2/2021

Dipendenza lineare

Basi, componenti, dimensione.

Rango (e calcolo del rango)

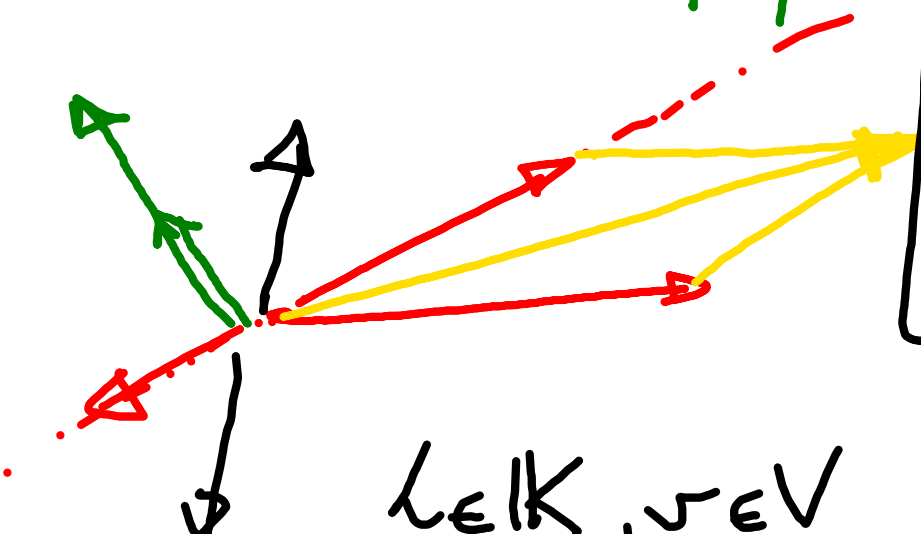
Teorema di Kronecker

Sistemi lineari.

V

$(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$

$(V, +)$ gruppo commutativo



$\lambda \in \mathbb{K}, v \in V$

λv

1) $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

2) $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

3) $\lambda(\mu(v)) = (\lambda\mu) v$

4) $1 v = v$

$(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è uno sp. vettoriale

La quaterna $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ si dice uno SPAZIO VETTORIALE

se:

$\mathbb{K}$ è un campo, V è un insieme,

$+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$

$(V, +)$ è un gruppo commutativo

1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V \quad \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall v \in V \quad (\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall v \in V \quad \lambda(\mu v) = (\lambda \mu) v$

4) $1 \cdot v = v$

Dipendenza lineare

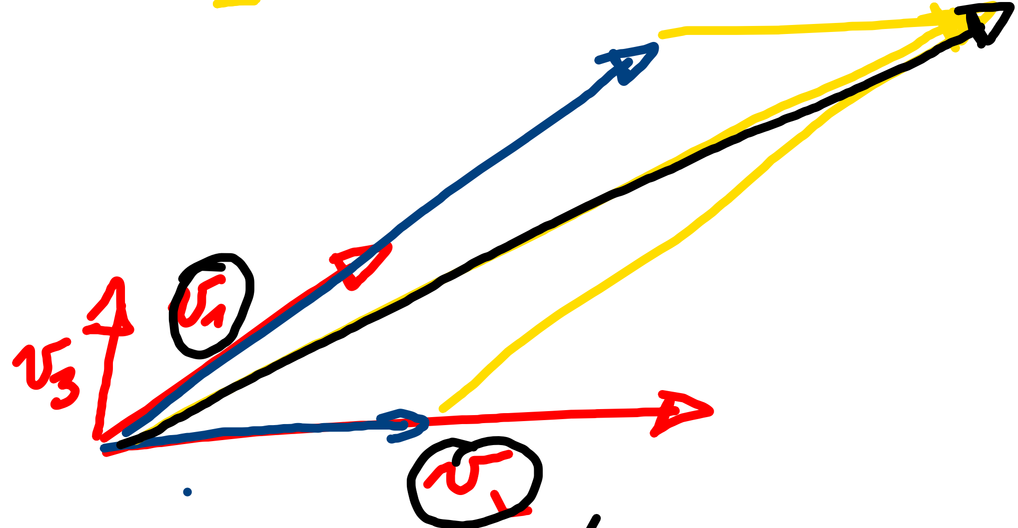
Es. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +, \cdot)$ $\qquad \mathbb{R}^2$

$\boxed{(1,2), (1,1), (0,1)}$ sono lin. dip.

$$(1,2) = 1(1,1) + 1(0,1)$$

Def.: i vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono lin. indip. se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$ implica $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

$$1(1,2) - 1(1,1) - 1(1,0) = (0,0)$$



$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

Sistema di generatori

Def. Si dice che $\{v_1, \dots, v_r\}$ è un sistema di generatori per V se ogni vettore $v \in V$ si può rappresentare come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$$

Def. Ogni sistema di generatori che sia anche lin. indip. si chiama **BASE**.

Base per $\mathbb{R}^2$: $\left(\overline{(1,0),(0,1)}\right)$

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

Base per P : $\left(\overline{1, x, x^2, x^3}, \ldots\ldots\right)$

$$M_{m,n}(\mathbb{K})$$

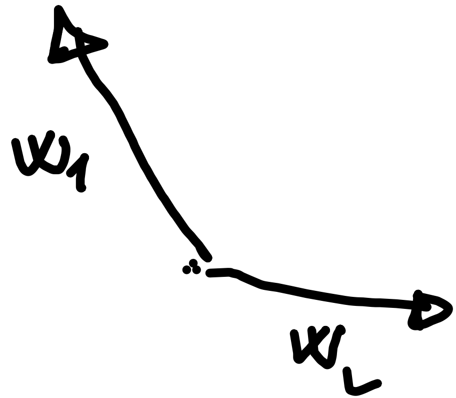
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \cdots$$

$$\cdots \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E_{mn} \Bigg)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1\,E_{11} + 4\,E_{12} + 3\,E_{21} + 0\,E_{22}$$

Teorema: tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità.



Def: Si dice dimensione di V ($\dim V$) la cardinalità di una qualunque base di V.

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\dim P = \infty$

$\dim M_{m,n}(\mathbb{R}) = mn$

$\cancel{(1,2)}, \underbrace{(1,1),(0,1)}_{\text{BASE}}$

$\cancel{(1,1)}, \underbrace{(1,2),(0,1)}_{\text{BASE}}$

Teorema: ogni s.v. ammette almeno una base.

Componenti di $v \in V$ rispetto a una base ordinata $(v_1, \ldots, v_n)$.

$$v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$$
$$v = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$$

$\Rightarrow$ $x_1 = y_1$, $\vdots$, $x_n = y_n$

$$0_V = (x_1 - y_1) v_1 + \ldots + (x_n - y_n) v_n$$

$x_1 - y_1 = 0$, $x_n - y_n = 0$

Fissiamo una base B per V

$$v \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

$$v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$$

Rango di una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$

$$r(A) = \dim(\langle R_1, \dots, R_m \rangle)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

$$\langle R_1, R_2, R_3 \rangle = \{ x_1(1,1,0) + x_2(2,1,0) + x_3(3,2,0) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = \{ (a,b,0) : a,b \in \mathbb{R} \}$$

$$r(A) = \dim(\langle C_1, C_2, C_3 \rangle) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\langle R_1, \ldots, R_m \rangle) = \dim(\langle C_1, \ldots, C_n \rangle)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

TRASFORMAZIONI RIGA:

1) Permutare le righe di A
2) Moltiplicare una riga per $K \neq 0$
3) Aggiungere a una riga il multiplo di un'altra riga.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si dice rango di A il numero di pivot in una forma ridotta di A.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

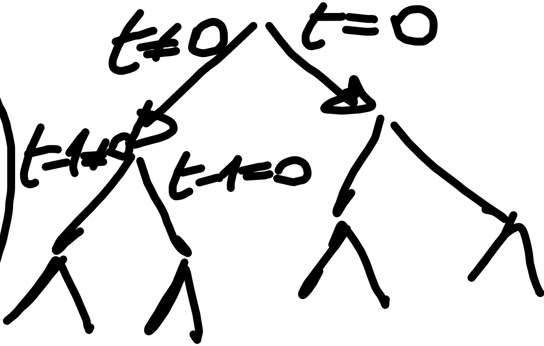
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Molto spesso, nei problemi concreti, le matrici coinvolte sono parametriche.

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & t-1 \\ 1 & 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$



$r(A) = ?$

Teorema di Kronecker.

Sia A una matrice $m \times n$.
Se A ammette un minore $M_{k \times k}$
con $\det M \neq 0$ i cui orlati
(se esistono) abbiano determinante nullo, allora $r(A) = k$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

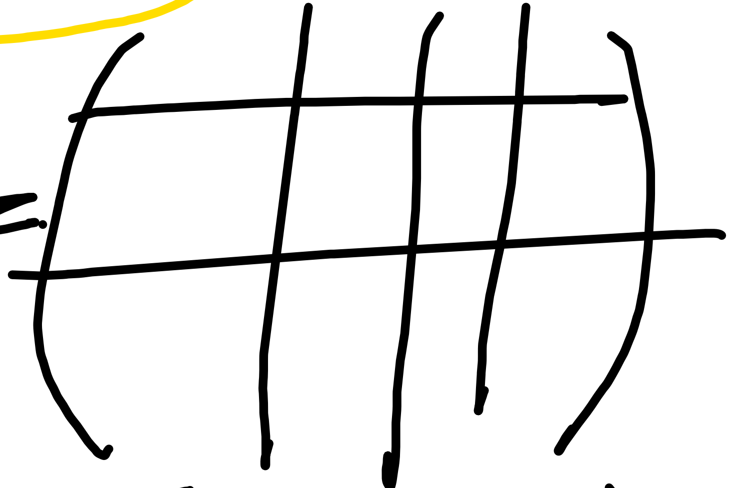
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$5+6+12-4-10-9 \qquad 3+6+4-4-6-3$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$7+6+15-5-14-9 \qquad 3+6+5-5-3-6$$

Minore di A :

$A =$ 

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & \pi & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & t-1 \\ 1 & 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t \end{matrix}}_{M}$$

$\det M = t^2 - 1$ $\det M \neq 0 \iff t \neq 1, -1$

Se $t \neq 1, -1$ $r(A) = 3$

Se $t = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & t-1 \\ 1 & 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3$$

$$\Uparrow$$

Se $t = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots\dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots\dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX = B}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \qquad \nexists \text{ sol.}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \qquad \infty \text{ sol.}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases} \qquad \exists! \text{ sol.}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$A \quad X \quad = \quad B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x \quad + 3z = 6 \\ \quad y - 2z = -3 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \quad + 3z = 6 \\ \quad y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$