Risoluzione di un sistema lineare col metodo di Cramer.

$$AX = B$$

$$\begin{array}{cccc} \text{par.} & \text{inc.} & \text{par.} & \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}\bar{X} = \bar{B} \Longrightarrow \bar{X} = \bar{A}^{-1}\bar{B}$$

$k \times k$

qui ci sono i parametri

$$\begin{cases} x+y-z-u=1 \\ 2x+2y-3z-3u=0 \end{cases}$$

$$AX=B$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & u & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} y-z=-x+u+1 \\ 2y-3z=-2x+3u \end{cases}$$

$$r(A)=2=r(C) \Rightarrow \exists \text{ sol.}$$

y, z incognite
x, u parametri

$$\bar{A}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \bar{B}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{pmatrix} -x+u+1 \\ -2x+3u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+t+1 \\ -2s+3t \end{pmatrix}$$

$$x = s$$
$$u = t$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -s+t+1 \\ -2s+3t \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s+t+1 \\ -2s+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s+t+1 \\ -2s+3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s+t+1 \\ -2s+3t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{-3s} + \cancel{3t} + 3 + \underline{2s} - \cancel{3t} \\ \cancel{-2s} + 2t + 2 + \cancel{2s} - 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+3 \\ -t+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = s \\ y = -s+3 \\ z = -t+2 \\ u = t \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Discussione di un sistema lineare parametrico.

Discutere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + ty + z = 1 \\ 2x - y + tz = t \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 1 & 1 \\ 2 & -1 & t & t \end{array}\right)$$

al variare del parametro t

$$\det\begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1-2t = 0 \Longrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Caso $t = -\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \neq 0$$

$$\begin{cases} x + y + tz = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$-1 - 2 + 2t - 1 = 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Con $t = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$r(A) = 2$$

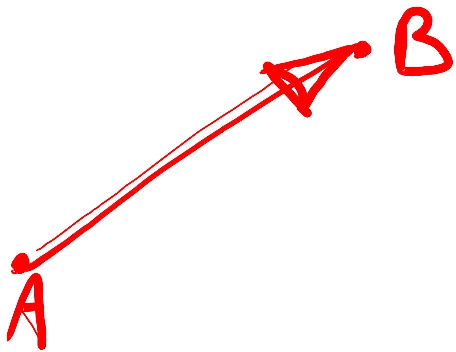
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-3 + 4 + 2 - 3 = 0$$

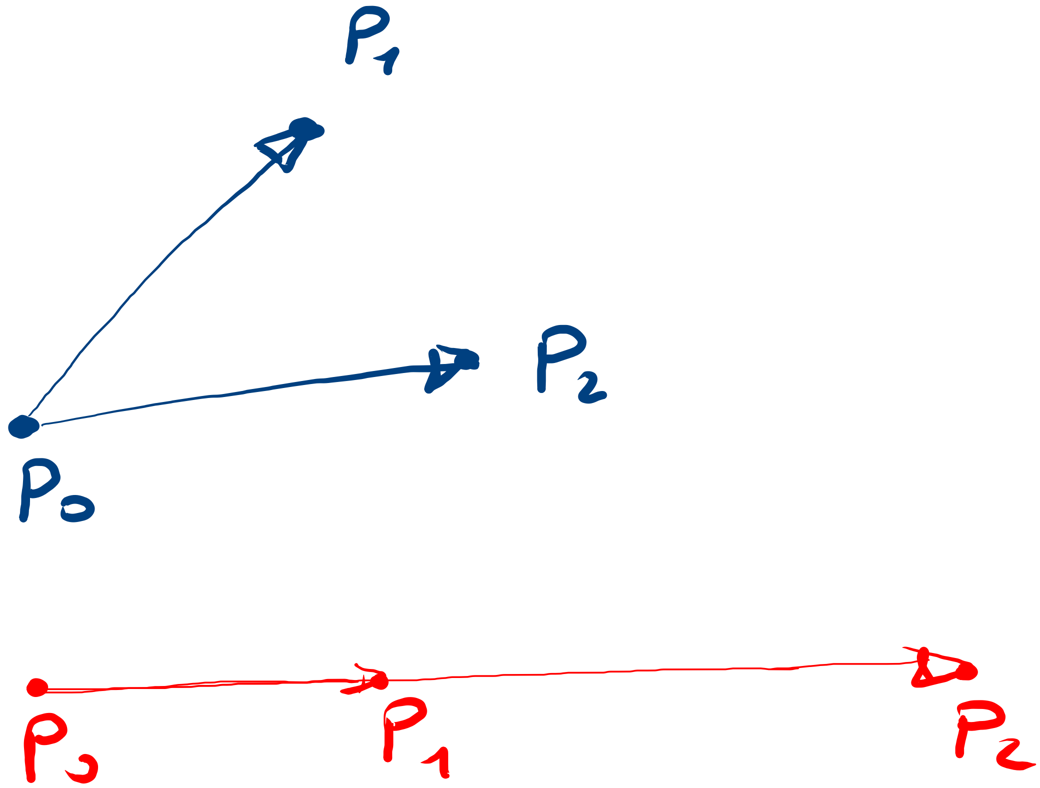
Dipendenza e indipendenza affine.

Def. I punti $P_0, \ldots, P_k$ si dicono affinemente indipendenti in uno spazio affine se i vettori $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}$ sono linearmente indipendenti.

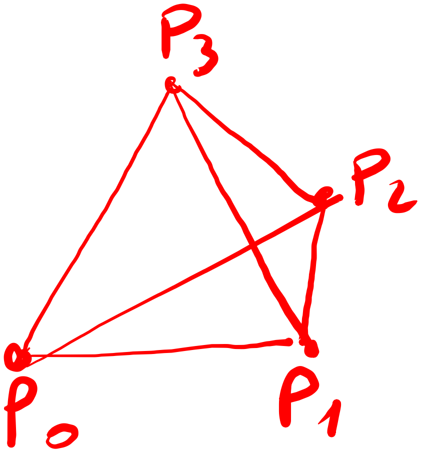
NB: $\overrightarrow{AB} := \overline{\varphi(A,B)}$ $\quad (A, \varphi)$



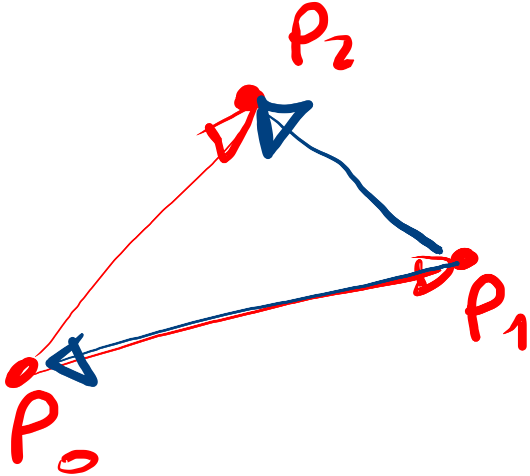
$$\overrightarrow{AB} = B - A$$



P_1
P_2
P_0
P_0
P_1
P_2



P_3
P_2
P_0
P_1



NB: La definizione di affine indipendenza NON dipende dall'ordine dei punti.

Es.: Determinare se i punti $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ sono aff. indip.

$$P_0 = (1,1,1,1)$$
$$P_1 = (0,1,0,1)$$
$$P_2 = (2,-1,-1,2)$$
$$P_3 = (1,2,3,4)$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P_1 - P_0 \\ P_2 - P_0 \\ P_3 - P_0 \end{array} \end{array}$$

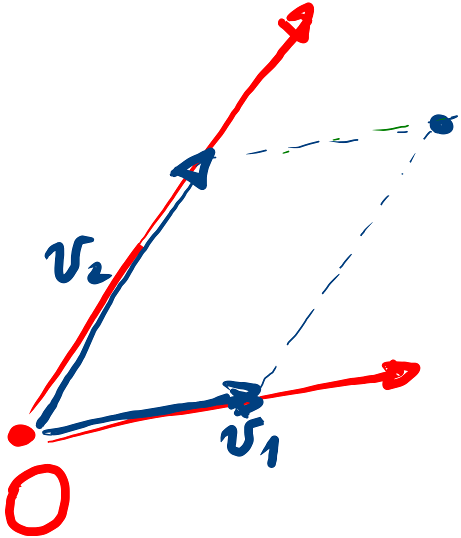
$$4 - 1 - 2 = 1 \neq 0$$

I quattro punti sono aff. indip.

Rappresentazioni parametriche e cartesiane

Un sistema di riferimento di uno spazio affine è dato da un punto O nello spazio e da una base dello spazio vettoriale V associato allo spazio affine.

$$(\mathbb{A}, \varphi) \qquad \varphi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$$



$$P = O + x_1 v_1 + x_2 v_2$$

$$\Updownarrow$$

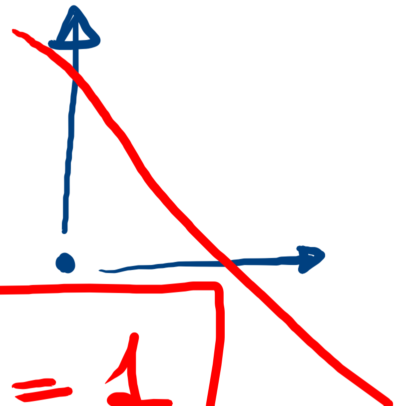
$$\vec{OP} = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

(x_1, x_2) <u>coordinate di P</u>

Dato un sistema di riferimento per uno spazio affine si può dimostrare che l'insieme delle coordinate dei punti di un qualunque sottospazio affine è dato dall'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

$$\begin{cases} 2x+2y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3s \\ y=1-3s \end{cases}$$



$$\boxed{\begin{cases} x+y=1 \end{cases}}$$

rappresentazione cartesiana della retta

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases}$$

rappresentazione parametrica della retta

Come si passa da una rappres. cartesiana a una rappr. parametrica?

Si risolve il sistema.

Come si passa da una rappres. parametrica a una rappr. cartesiana?

1) Eliminando i parametri

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1-t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = 1-t \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$r\begin{pmatrix} x & y-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \Leftarrow \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Uparrow$$

$$\det\begin{pmatrix} x & y-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-x-(y-1) = 0 \Longrightarrow -x-y+1 = 0$$

$$x+y = 1$$

$$\begin{cases} x = 2s - t + 3 \\ y = s + t \\ z = s - t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \det \begin{pmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

Spazio affine $(\mathbb{A}, \varphi)$

$\varphi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$

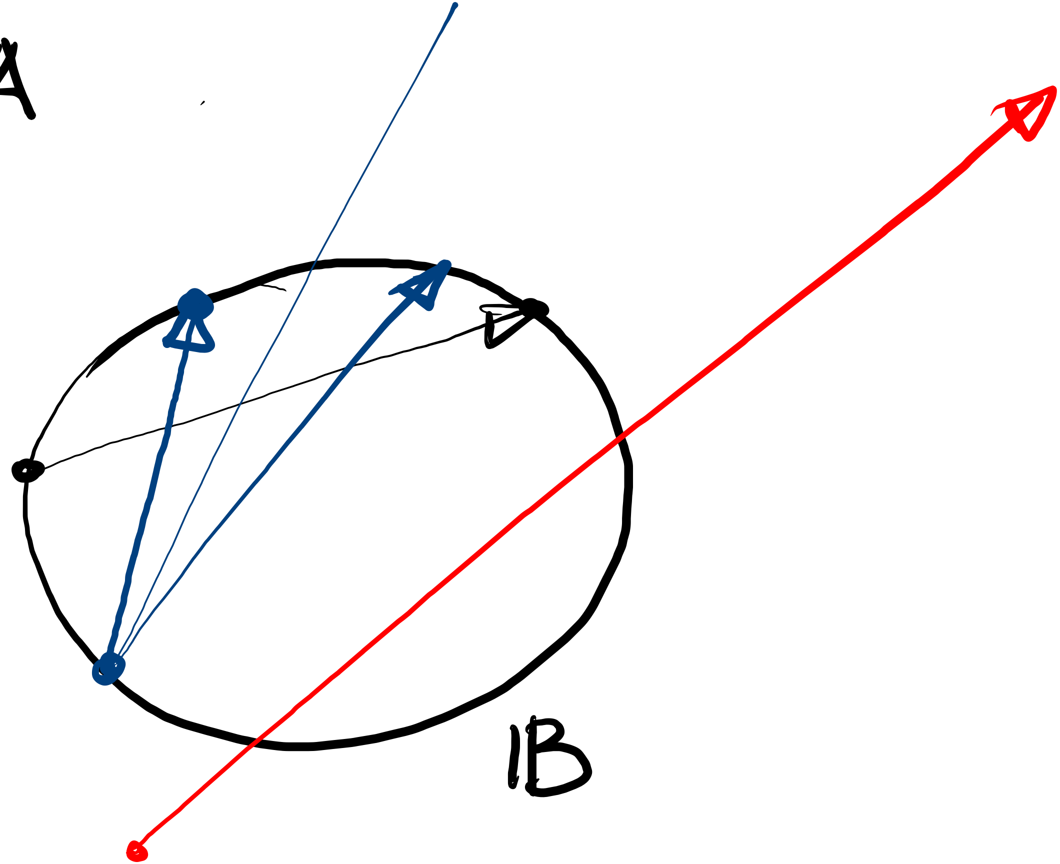
1) $\forall P \in \mathbb{A}$, $\varphi(P, \cdot) : \mathbb{A} \to V$ è una biezione.

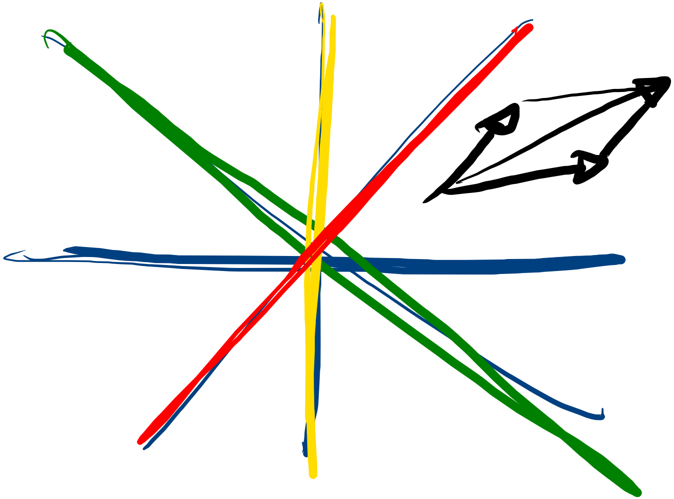
2) $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}$ $\varphi(P,Q) + \varphi(Q,R) = \varphi(P,R)$

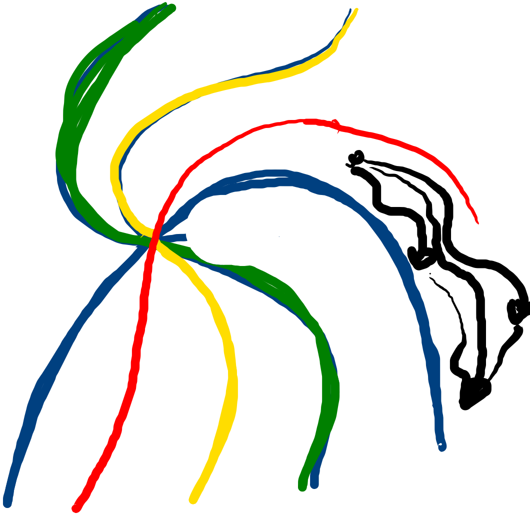
$(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR})$

Un sottospazio affine di $(\mathbb{A}, \varphi)$ è un sottoinsieme $\mathbb{B}$ di $\mathbb{A}$ t.c. $\varphi_{|\mathbb{B}\times\mathbb{B}} : \mathbb{B}\times\mathbb{B} \to V$ verifica le due proprietà predette.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{A}$

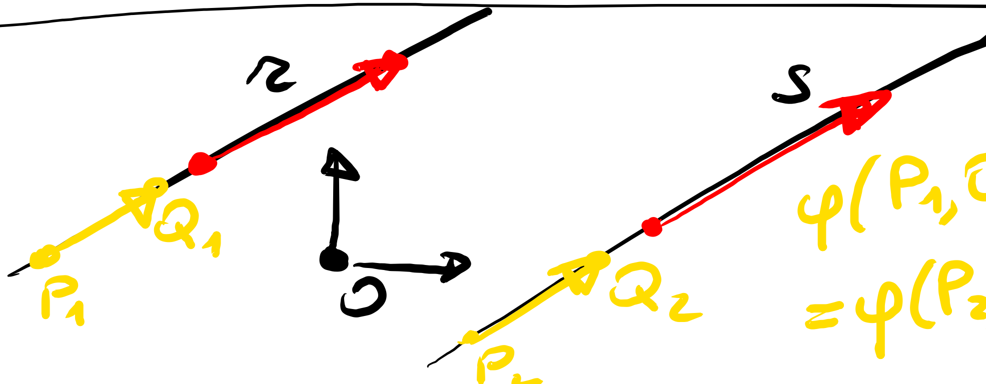






Dato un sottospazio affine $\mathbb{A}$ di uno spazio affine, si può considerare la sua GIACITURA:

$$\{ \varphi(P,Q) : P, Q \in \mathbb{A} \}$$



$$\varphi(P_1,Q_1) = \\ = \varphi(P_2,Q_2)$$

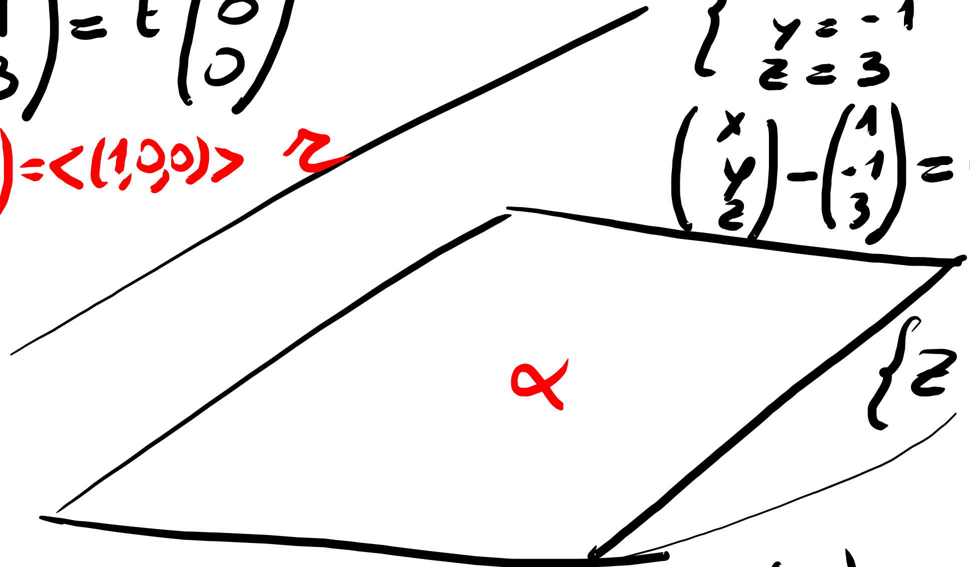
Se $\mathbb{A}_1$ e $\mathbb{A}_2$ sono due sottospazi affini di $\mathbb{A}$ e $\mathrm{giac}(\mathbb{A}_1) \subseteq \mathrm{giac}(\mathbb{A}_2)$ o $\mathrm{giac}(\mathbb{A}_2) \subseteq \mathrm{giac}(\mathbb{A}_1)$ i due spazi si dicono <u>PARALLELI</u>.

$$\begin{pmatrix} x-1\\ y+1\\ z-3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = t+1\\ y = -1\\ z = 3\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

giac$(r) = \langle (1,0,0) \rangle$



$$\begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = s\\ y = t\\ z = 0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

giac$(\alpha) = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$

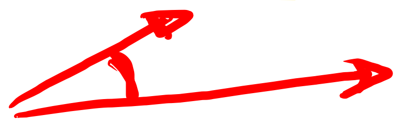
Spazi euclidei

Prodotto scalare: forma bilineare simmetrica definita positiva.

Prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 =$$

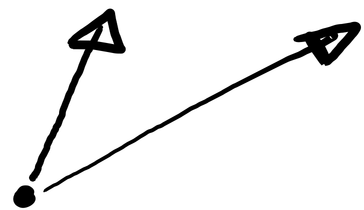
$$\|(x_1,y_1)\|\,\|(x_2,y_2)\| \cos (x_1,y_1)(x_2,y_2)$$



$$\|(x_1,y_1)\| = \sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{\langle (x_1,y_1),(x_1,y_1)\rangle}$$

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \boxed{4x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4y_1y_2}$$

Uno spazio euclideo è uno spazio affine in cui lo spazio vettoriale V è dotato di un prodotto scalare.



Ortogonalità

Sia V uno s.v. dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Se $v_1, v_2 \in V$, diciamo che $v_1 \perp v_2$ (v_1 è ortogonale a v_2) se $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Questo concetto di ortogonalità fra vettori può essere trasferito ai sottospazi affini.
Pensiamo in particolare all'ortogonalità fra rette:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = t \end{cases}$$

$$\langle (1,-2) \rangle \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle (2,1) \rangle$$

$$\langle (1,-2),(2,1)\rangle = 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 = 0$$

Le rette r e s sono fra loro ortogonali.

Le coppie coord. delle che abbiamo calcolato $((1,-2),(2,1))$ si dicono COEFFICIENTI DIRETTORI

Iperpiani di $\mathbb{R}^n$ (o di uno spazio affine n-dimensionale)

$$\boxed{a_1 x_1 + \dots\dots + a_n x_n = b}$$

(con a_i non tutti nulli)

Iperpiano in $\mathbb{R}^3$ è un piano:

$$x + y + z = 1$$

Iperpiano in $\mathbb{R}^4$: $x - 2y + 3z + 4u = 7$