$W = \mathbb{R}^3$ s. vett. $\quad V = \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \mid f \text{ lin}\}$ ha dim $= 3$

$V = W^*$ $\Rightarrow \cong \mathbb{R}^3$

f lineare su $\mathbb{R}^3$

$f((x, y, z)) = ax + by + cz$

Iperpiano di W i π : $ax + by + cz = 0$

(cioè sottosp. vett. di dim $= 3 - 1$)

Lui è determinata non solo da $ax + by + cz$ ma anche da

$\lambda ax + \lambda by + \lambda cz$, con $\lambda \neq 0$

Ogni sottospazio vett. di dim h di W determina un sotto-spazio proiettivo di dim $h-1$ di $\mathbb{P}(W)$. Perciò ogni iperpiano $ax+by+cz=0$ di W determina un iperpiano, avente la stessa equazione, di $\mathbb{P}(W)$.

Data la retta pr. $\mathbb{P}$ con rif. $\mathcal{R}$,
data la retta pr. $\mathbb{P}'$ con rif $\mathcal{R}'$,
sia $\bar{\mathcal{R}} = (A_0, A_1, U)$ con
$A_0 \equiv_{\mathcal{R}} (1,3)$, $A_1 \equiv_{\mathcal{R}} (2,7)$, $U \equiv_{\mathcal{R}} (2,9)$) ;
sia poi $\bar{\mathcal{R}}' = (A'_0, A'_1, U')$ con
$A'_0 \equiv_{\mathcal{R}'} (7,3)$, $A'_1 \equiv_{\mathcal{R}'} (5,2)$, $U' \equiv_{\mathcal{R}'} (4,2)$)

$$\begin{pmatrix} 87 & -22 \\ 39 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 & -22 \\ 39 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 & -22 \\ 39 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 & -22 \\ 39 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$-6 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 & -22 \\ 39 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

PROP. Ogni affinità conserva il rapporto semplice di ogni terna (A, B, C) di punti collineari, cioè il numero

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$ad - bc \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Il birapporto $(ABCD)$ risulta uguale a

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}$$