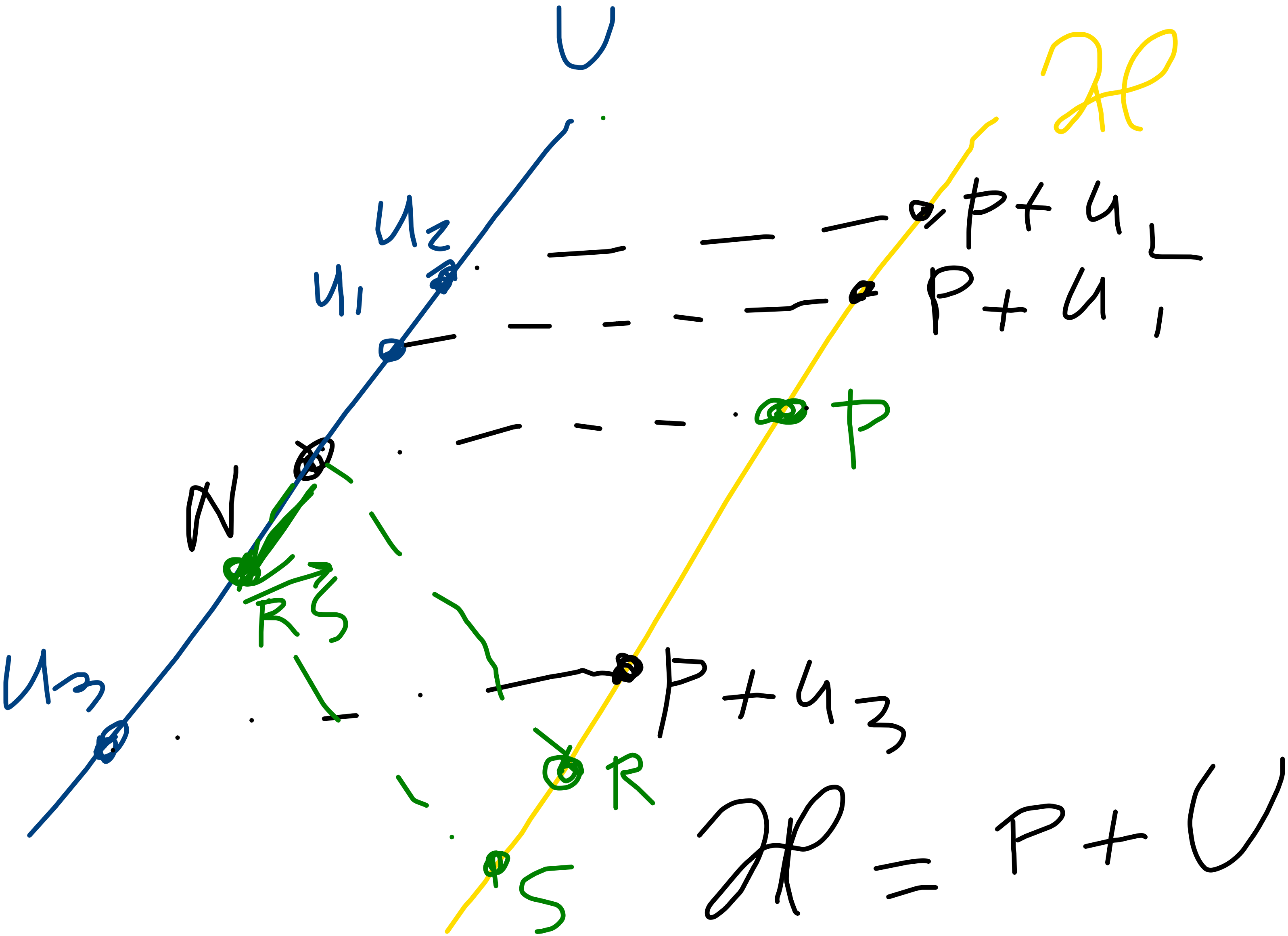


U
ℋ
u2
u1
P + u2
P + u1
P
N
R
S
u3
P + u3
R
S
ℋ = P + U

NB - La nozione di parallelismo fra sottospazi affini $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ $(\dim \mathcal{H} \le \dim \mathcal{H}')$ cioè "la giacitura di $\mathcal{H}$ è contenuta nella giacitura di $\mathcal{H}'$" diventa "la parte impropria dell'ampl. pro. di $\mathcal{H}$ è contenuta nella parte impropria dell'ampl. pro. di $\mathcal{H}'$"

In $\mathbb{R}^3$ siano

$$r: \begin{cases} x-3y+4z-1=0 \\ 2x+5y+z+2=0 \end{cases}$$

$$\pi: 3x+2y+5z+4=0$$

Dire se $r \parallel \pi$ o no.

Passo alle giaciture: $\xrightarrow{}$

$$\vec{r}: \begin{cases} x-3y+4z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases} \qquad \vec{\pi}: 3x+2y+5z=0$$

Mi chiedo: $\vec{r} \subset \vec{\pi}$?

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 2 \end{matrix} & 5 \end{pmatrix}$$

det $\neq 0$ $\Rightarrow$ $\rho \geq 2$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 11 & -7 \\ 0 & 11 & -7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \rho = 2$$

Sì

Nell'ampl. pro. |

$$r : \begin{cases} -x_0 + x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_0 + 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\pi : 4x_0 + 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

La parte impropria di r (cioè $r \cap \pi_\infty$) è contenuta nella parte impropria di π (cioè $\pi \cap \pi_\infty$)?

$$r \cap \pi_\infty : \begin{cases} \cancel{-x_0} + x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ \cancel{2x_0} + 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\pi \cap \pi_\infty \begin{cases} \cancel{4x_0} + 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$e = 2$$

$P = [u] \quad u \equiv (x_0, \dots, x_n) \quad Q = [v] \quad v \equiv (y_0, \dots, y_n)$

φ forma bil. simm. associata a f

$$\varphi(u,v) = (x_0 \dots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

discrim. di $[f]$, cioè matrice di Gram di φ, è simmetrica

$$\underbrace{\underbrace{(y_0 \cdots y_n)}_{1\times(n+1)} \cdot \underbrace{A}_{(n+1)\times(n+1)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{(n+1)\times 1}}_{1\times 1} =$$

$$\left((x_0 \cdots x_n) \cdot A^T \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)^T =$$

$$= \Bigg(\underbrace{(x_0 \cdots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{1\times 1} \Bigg)^T = (x_0 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$P \equiv (\bar{y}_0 \, \dots \, \bar{y}_n)$$

$$\tau(P) : (\bar{y}_0 \, \dots \, \bar{y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

incognite

anche

$$(x_0 \, \dots \, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = 0$$

T. di reciprocità | $P=[\bar{u}]\ \bar{u}\equiv(\bar{x}_0 - - \bar{x}_n)$

$Q=[\bar{v}]\ \bar{v}\equiv(\bar{y}_0 - \bar{y}_n)$

DIM 1:

$P \in \tau(Q) \iff \varphi(\bar{u},\bar{v})=0 \iff$

φ simm

$\iff \varphi(\bar{v},\bar{u})=0 \iff Q\in\tau(P)$

DIM 2: $P\in\tau(Q) \iff (\bar{x}_0 - - \bar{x}_n)$ soddisfa

$(y_0 - - y_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \iff (\bar{y}_0 - \bar{y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = 0$

incognite

$\iff (\bar{x}_0 - - \bar{x}_n) A \cdot \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ | \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \iff (\bar{y}_0 - \bar{y}_n)$ soddisfa.

$$(\bar{x}_0 \ldots \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \iff$$

incognite

$$\iff Q \in \tau(P)$$

PROP – $\forall P \in \mathbb{P} - W[f]$ $\quad W[f] \subseteq \tau(P)$

DIM – Sia $Q \in W[f]$, sappiamo che ogni punto di P è coniugato a Q, quindi anche P è coniugato a Q. Ma

allora Q è coniugato a P;
perciò $Q \in \tau(P)$.
Dunque $W[f] \subseteq \tau(P)$.

PROP - $P \in \tau(P) \iff P \in I_n[f]$

DIM - Sia $P \equiv (\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_n)$, allora

$$\tau(P): \quad (\bar{y}_0 \; \dots \; \bar{y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

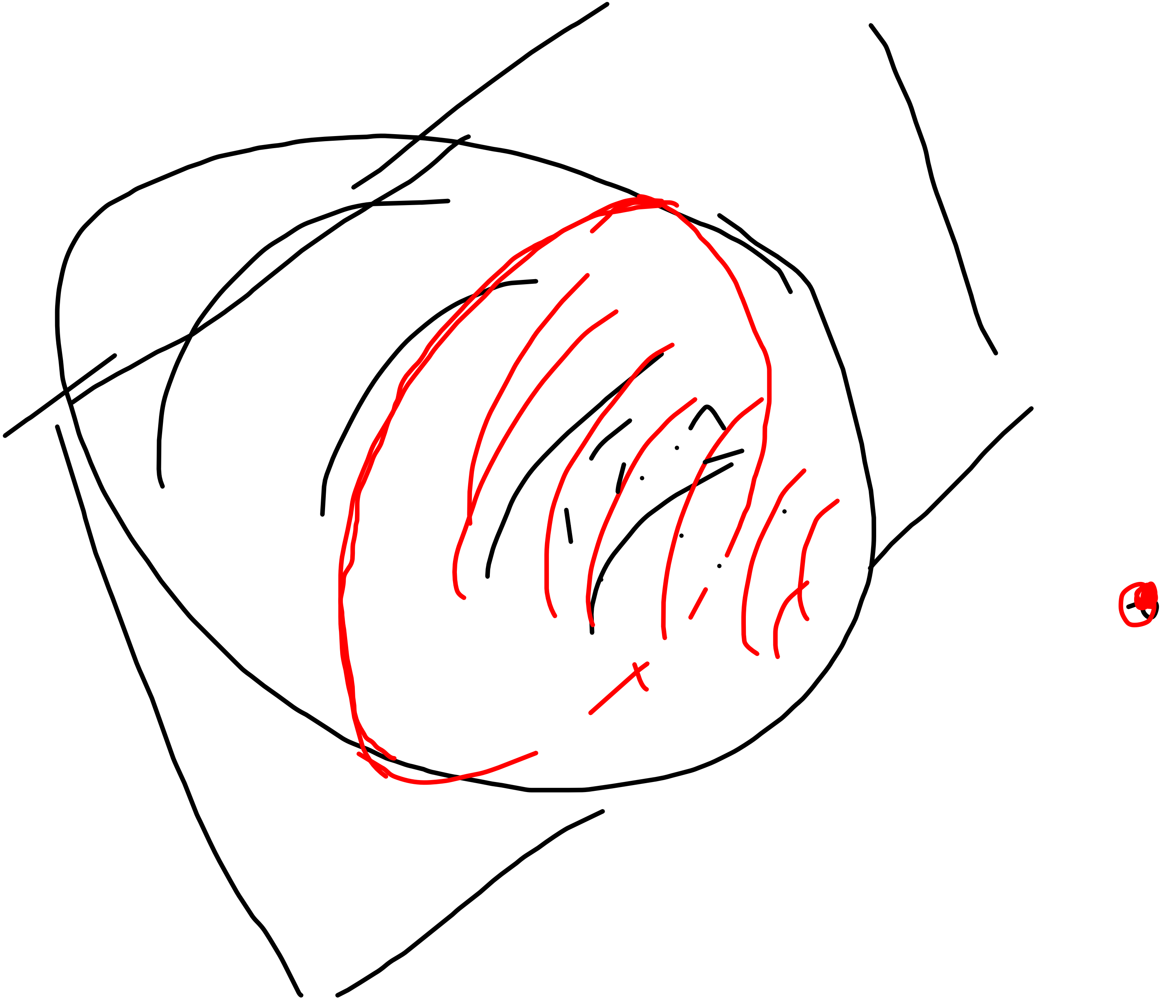
incognite

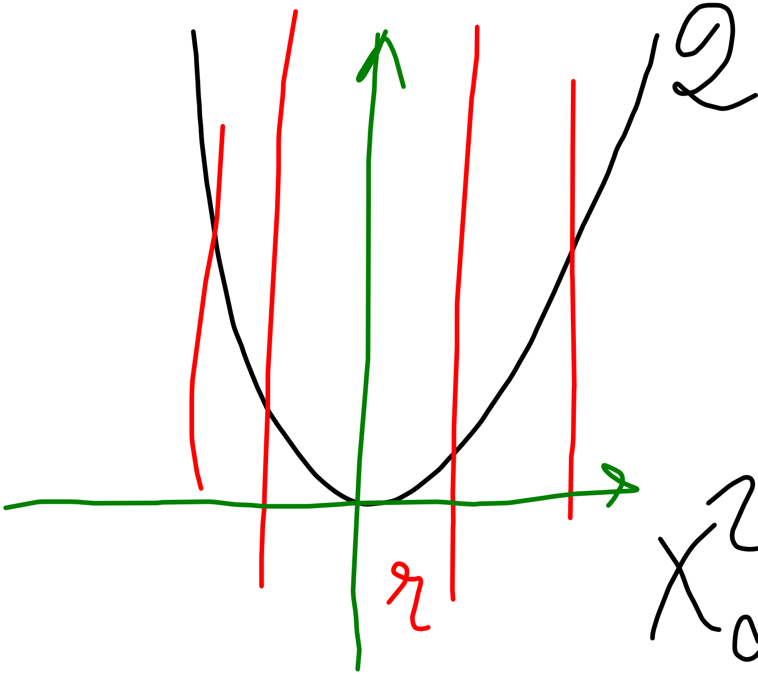
$$P \in Q(P) \iff (\bar{y}_0 \cdots \bar{y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff P \text{ soddisfa } (x_0 \cdots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

incognite

$$\iff P \in \operatorname{Im}[f]$$





$$y = x^2$$

$$x^2 - y = 0$$

$$x_0^2 \cdot \left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - \frac{x_2}{x_0} = 0 \right)$$

$r: x - 3 = 0$

$$x_0\left(\frac{x_1}{x_0} - 3\right) = 0$$

$Q: x_1^2 - x_0 x_2 = 0$

$r: x_1 - 3x_0 = 0$

Q nr 1 $\begin{cases} x_1^2 - x_0 x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (3x_0)^2 - x_0 x_2 = 0 \\ x_1 = 3x_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_0(9x_0 - x_2) = 0 \\ x_1 = 3x_0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 3x_0 \end{cases}$ $(0,0,1)$

coeff. dir. $(0,1)$

$\begin{cases} x_2 = 9x_0 \\ x_1 = 3x_0 \end{cases}$ $(1,3,9)$

coord. affini $(3,9)$

Cosa succede se interseca $\mathcal{Q}$ con r_∞ $(x_0 = 0)$?

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &: \\ r_\infty &: \end{aligned} \begin{cases} x_1^2 - \cancel{x_0 x_2} = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

unica intersez. 1

$(0, 0, 1)$

r_∞ è tangente a $\mathcal{Q}$ in

Esercizio

Rispetto alla conica di eq. $x_0^2+3x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2=0$, trovare il polo di $r: 12x_0-3x_1+4x_2=0$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Prendo 2 punti (lin. ind.) su r e ne interseco le rette polari.

r_1 $12X_0 - 3X_1 + 4X_2 = 0$

interseco con $X_1 = 0$

$$\begin{cases} r_1 \\ X_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 12X_0 + 4X_2 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = -3X_0 \\ X_1 = 0 \end{cases}$$

$R_1 \equiv (1, 0, -3)$

Interseco con $X_2 = 0$ $\Big\{ X_2 = 0$

$$\begin{cases} 12X_0 - 3X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = 4X_0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \qquad R_2 \equiv (1, 4, 0)$$

polare di R_1

$$(1 \;\; 0 \;\; -3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \;\; 6 \;\; -15) \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad X_0 + 6X_1 - 15X_2 = 0$$

polare di R_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad x_0 + 12x_1 - 8x_2 = 0$$

polo di r:
$$\begin{cases} x + 6x_1 - 15x_2 = 0 \\ x_0 + 12x_1 - 8x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -15 \\ 1 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

palo

$$\equiv \left(\begin{vmatrix} 6 & -15 \\ 12 & -8 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \right)$$

$$\left(\frac{-\begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -15 \\ 12 & -8 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}}{\quad} \right)$$

Polo di un piano Π risp. a una quadrica non specializz. interseca i piani polari di 3 punti $\boxed{\text{lin. indip.}}$ di Π

$\mathcal{Q}: 3x_0^2 + 2x_0x_3 + x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 6x_3^2 = 0$

$\pi: 4x_0 + x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

Trovare il polo di π risp. a $\mathcal{Q}$.