In $\mathbb{A}^2$ $P \equiv (2, -5)$ $Q \equiv (3, 4)$
rappresentare la retta PQ

$\overrightarrow{PQ} \equiv (\underset{3-2}{1}, \underset{4-(-5)}{9})$ $X \equiv (x, y)$

$\overrightarrow{PX} \equiv (x-2, y+5)$

rappr. param. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

. .

rappr. cart. 1

impongo

$$r \quad \begin{vmatrix} (x-2) & 1 \\ (y+5) & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} (x-2) & 1 \\ (y+5) & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$9x - 18 - y - 5 = 0$$

$$9x - y - 23 = 0$$

Nell'ampl. pro.
$P \equiv (1, 2, -5)$ $Q \equiv (1, 3, 4)$
rappresentare la retta PQ

rappr. param.'
generica punto $X \equiv (x_0, x_1, x_2)$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\det \neq 0 \Rightarrow r = 2$

rappr. cart. 1

Impongo

$$\eta\begin{pmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ x_2 & \boxed{-5} & \boxed{4} \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 2 & 3 \\ x_2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad x_0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} - x_1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + x_2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$23x_0 - 9x_1 + x_2 = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad -9x + y + 23 = 0$$

Forma bilineare: $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ t.c. $\forall\, u, v, w \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$\varphi(u+v, w) = \varphi(u,w) + \varphi(v,w)$$

$$\varphi(u, v+w) = \varphi(u,v) + \varphi(u,w)$$

$$\varphi(\alpha u, v) = \alpha\varphi(u,v) = \varphi(u, \alpha v)$$

simmetrica se $\forall\, u, v \in V$ $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$

Fisso in V una base ordinata $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Matrice di Gram di φ relativa a $\mathcal{B}$ è

$$A = (a^i_j)_{i,j \in \mathbb{N}_n} \quad \text{con}$$

$$a^i_j = \varphi(e_i, e_j).$$

PROP - Siano

$u \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$, $v \equiv_{\mathcal{B}} (y_1, \dots, y_n)$

allora

$$\varphi(u, v) = (x_1 \dots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

PROP - $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\right) \longmapsto \varphi\left((x), (y)\right)$$

risulta essere bilineare

$\Updownarrow$

è polinomiale omogenea di 1° grado nelle x_i e di 1° grado nelle y_i o nulla

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \longmapsto$$

$$x_1 + x_2 y_3 - x_3 y_1$$

NO

$$x_1 x_2 + x_2 y_3 - x_3 y_1$$

NO

$$x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_1$$

Sí

$\varphi(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_3 - x_3 y_1$

$\varphi((1,0,0),(1,0,0)) = 0$

$\varphi((1,0,0),(0,1,0)) = 0$

$\vdots$

$\varphi((0,0,1),(0,0,1)) = 0$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varphi\left((x),(y)\right) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - 5x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + 7x_3y_1 - 9x_3y_2 + 4x_3y_3$$

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

PROP - φ è simmetrica

$\Updownarrow$

A è simmetrica

Forma quadratica: $q: V \to \mathbb{K}$

t.c. $\exists$ forma bilineare $\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$

per cui, $\forall v \in V$, $q(v) = \varphi(v, v)$

PROP - Fra tutte le f. bilineari $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ t.c. $q(v) = \varphi(v, v)$ ce n'è esattamente una simmetrica, detta forma polare di q.

Matrice di Gram della f. quadr. q: la matrice di Gram della sua forma polare.

Se ho la matrice di Gram A di una qualsiasi φ bilineare associata a q, ho:

con $v = (x_1, \dots, x_n)$

$$q(v) = \varphi(v, v) = (x_1 \dots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esempio: con la φ b17. (non simmetrica) di prima, la f. quadratica associata è

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \big((x_1 + x_2 + 7x_3)(3x_1 - 9x_3)(-5x_1 + x_2 + 4x_3)\big) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + x_2 x_1 + 7x_3 x_1 + 3x_1 x_2 - 9x_3 x_2 - 5x_1 x_3 + x_2 x_3 + 4x_3^2 =$$

$$= x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 8x_1 x_3 + 4x_3^2$$

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 \cancel{+}\, 8x_1x_3 + 4x_3^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

PROP – $q : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto q((x))$

risulta essere quadratica $\Longleftrightarrow$ è o nulla o polinomiale omogenea di 2° grado