

In \mathcal{A}^2 $P \equiv (2, -5)$ $Q \equiv (3, 4)$
rappresentare la retta PQ

$$\overrightarrow{PQ} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$3-2 \quad 4-(-5)$

$$X \equiv (x, y)$$
$$\overrightarrow{PX} \equiv (x-2, y+5)$$

repr. param.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$r \rightarrow ppr. \text{ cart. } |$

imp cond

$$z \begin{pmatrix} (x-2) & | & 1 \\ (y+5) & | & 9 \end{pmatrix} = 1$$
$$\left| \begin{array}{c|c} (x-2) & 1 \\ (y+5) & 9 \end{array} \right| = 0$$

$$9x - 18 - y - 5 = 0$$

$$9x - y - 23 = 0$$

Nell'amp. pro.

$$P \equiv (1, 2, -5) \quad Q \equiv (1, 3, 4)$$

Rappresentare la retta PQ

Rapp. param.

generica punta $X \equiv (x_0, x_1, x_2)$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\det \neq 0 \Rightarrow n = 2$$

Rapport cart. 1

Impongo

$$g \begin{pmatrix} X_0 & 1 & 1 \\ X_1 & 2 & 3 \\ X_2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} X_0 & 1 & 1 \\ X_1 & 2 & 3 \\ X_2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$X_0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} - X_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + X_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$23X_0 - 9X_1 + X_2 = 0$$

$$\leadsto -9x + y + 23z = 0$$

Forms bilineare: $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$

t.c. $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$\varphi(u+v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$$

$$\varphi(u, v+w) = \varphi(u, v) + \varphi(u, w)$$

$$\varphi(\alpha u, v) = \alpha \varphi(u, v) = \varphi(u, \alpha v)$$

Symmetric $\forall u, v \in V \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

Fisso in V una base ordinata
 $B = (e_1, \dots, e_n)$. Matrice di Gram
di φ relativo a B e'

$$A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_n} \quad \text{con}$$

$$a_{ij} = \varphi(e_i, e_j).$$

PRCP - Siduo

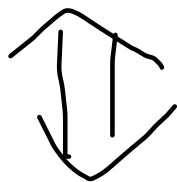
$$u \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n), \quad v \equiv_{\mathcal{B}} (y_1, \dots, y_n)$$

allora

$$\varphi(u, v) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

PROP - $\varphi: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$
 $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \longmapsto \varphi(x, y)$

risulta essere bilineare



è polinomiale omogenea di
1° grado nelle x_i e di 1° grado
nelle y_i o nulla

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \longmapsto$$

$$x_1 + x_2 y_3 - x_3 y_1$$

NO

$$x_1 x_2 + x_2 y_3 - x_3 y_1$$

NO

$$x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_1$$

SI

$$\varphi(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_3 - x_3 y_1$$

$$\varphi((1, \sigma, 0), (1, \sigma, 0)) = 0$$

$$\varphi((1, \sigma, 0), (\sigma, 1, 0)) = 0$$

⋮

$$\varphi((\sigma, \sigma, 1), (\sigma, \sigma, 1)) = 0$$

$$\begin{matrix}
 & y_1 & y_2 & y_3 \\
 x_1 & 0 & 0 & 1 \\
 x_2 & 0 & 0 & 1 \\
 x_3 & -1 & 0 & 0
 \end{matrix}$$

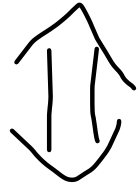
$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - 5x_1 y_3 +$$

$$+ x_2 y_1 + x_2 y_3 +$$

$$+ 7x_3 y_1 - 9x_3 y_2 + 4x_3 y_3$$

$$A = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

PROP - φ è simmetrica



A è simmetrica

Forma quadratica : $q : V \rightarrow \mathbb{K}$
t.c. \exists forma bilineare $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$
per cui, $\forall v \in V$, $q(v) = \varphi(v, v)$

PROP - Fra tutte le f. bilineari $q: V \times V \rightarrow K$ t.c. $q(v) = q(v, v)$ ce n'è esattamente una simmetrica, detta **forma polare** di q .

Matrice di Gram della f. quad. q
la matrice di Gram della sua forma polare.

Se ho la matrice di Gram A
di una qualsiasi φ bilineare
e associata a q , ho:
con $v \equiv (x_1, \dots, x_n)$

$$q(v) = \varphi(v, v) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esempio, con la φ bil. (non
simmetrica) di prima, la
f. quadratica associata è

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left((x_1 + x_2 + 7x_3) (3x_1 - 9x_3) (-5x_1 + x_2 + 4x_3) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + x_2 x_1 + 7x_3 x_1 + 3x_1 x_2 - 9x_3 x_2 - 5x_1 x_3 + x_2 x_3 + 4x_3^2 =$$

$$= x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 8x_1 x_3 + 4x_3^2$$

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 8x_1x_3 + 4x_3^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

PROP - $q: K^n \rightarrow K$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto q(x)$$

risulta essere quadratica \Leftrightarrow è o nulla
o polinomio omogeneo di 2° grado