$$A = E^t B E \qquad |E| \neq 0$$

$$|A| = |E^t R E| = |E^t| \cdot |B| \cdot |E| =$$

$$= |B| \cdot (|E|)^2$$

$$|-A| = (-1)^{n+1} |A|$$

$$\in M_{(n+1)\times(n+1)}$$

Quadriche di rango 3:

voglio sapere se sono:

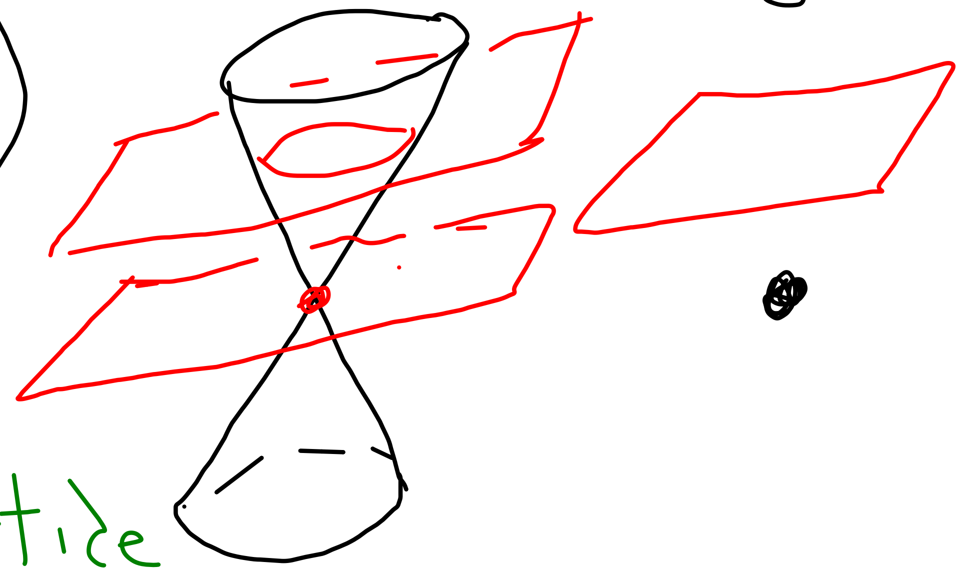
coni reali

coni immaginari

cilindri reali

cilindri imm.

Proiettivamente distinguiamo coni reali
$(\sigma=(2,1)$ o $(1,2))$ e coni immaginari
$(\sigma=(3,0)$ o $(0,3))$



I piani che intersecano in coniche deg. sono tutti e soli quelli contenenti il vertice

Dal punto di vista affine questi coni (che chiameremo coni proiettivi) se necessario si distinguono in coni affini se il vertice è proprio, cilindri se il vertice è improprio

$rA = 3$

	$A_0^0 = 0$ conica impr. deg. cilindro	$A_0^0 \neq 0$ conica impr non deg cono (affine)
cono (pro) imm. (3,0) (0,3)	cilindri imm.	coni (aff) imm.
cono (pro) reale (2,1) (1,2)	cilindri reali	coni (aff) reali

conica impropria non deg imm.

conica impropria non deg reale

ATTENZIONE

non è una classificazione completa, infatti, per es., ci sono cilindri reali non fra loro affinemente equivalenti

Classificare

$$(3\lambda-1)x^2+(1-\lambda)y^2+2\lambda xz+2z-4\lambda=0$$

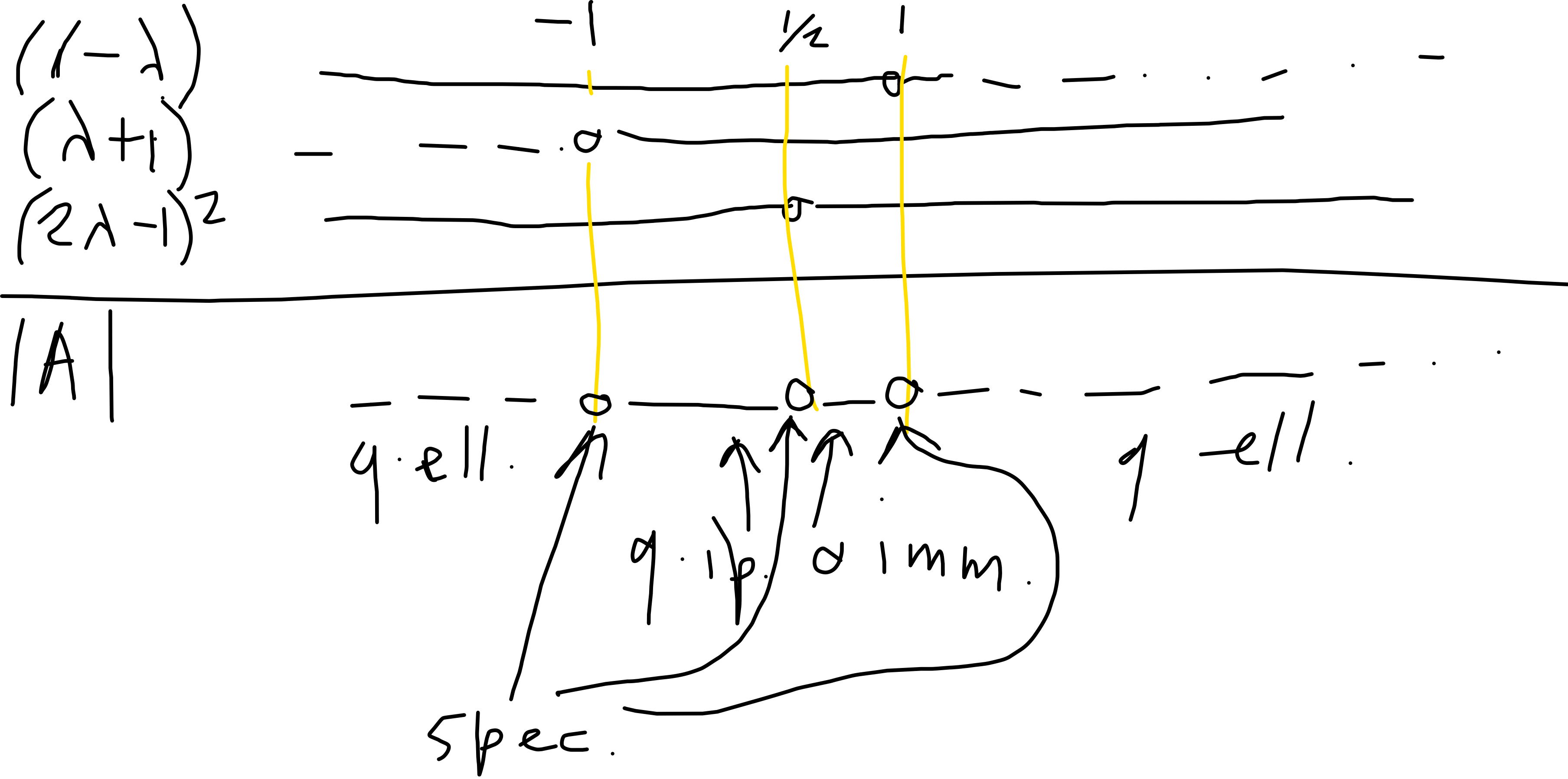
$$A=\begin{pmatrix} -4\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (3\lambda-1) & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 4 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & & -4 & +4 & -1 \\ \hline & 4 & -4 & +1 & 0 \end{array}$$

$$|A|=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -4\lambda & 0 & 1 \\ 0 & (3\lambda-1) & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -4\lambda & 0 & 1 \\ 4\lambda^2 & (3\lambda-1) & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 4\lambda^2 & (3\lambda-1) \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(4\lambda^3-3\lambda+1)=(1-\lambda)(\lambda+1)(4\lambda^2-4\lambda+1)$$

$$=(1-\lambda)(\lambda+1)(2\lambda-1)^2$$



-1
1/2
1
(1-λ)
(λ+1)
(2λ-1)^2
|A|
q. ell.
q. hp.
q. imm.
q. ell.
spec.

$$M_0^a = \begin{pmatrix} (3\lambda-1) & 0 & \lambda \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M_0^0 sempre indefinita

$$A_0^0 = |M_0^0| = \lambda^2(\lambda-1)$$

		0		1	
λ^2	+	0	+		+
$(\lambda-1)$	−		−	0	+
A_0^0	−	0	−	0	+

$\lambda = -1$

$|M_0^0| \neq 0$

$rA = 3$

cono aff. reale

$\lambda = \frac{1}{2}$

$|M_0^0| \neq 0$

$rA = 3$

cono aff. reale

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad rA = 3$$

$|M_0^0| = 0$ cilindro reale

$$\begin{vmatrix} (-4-\lambda) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} (-4-\lambda) & 0 & 1 \\ 0 & (2-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\left((-4-\lambda) \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & (2-\lambda) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \lambda\left((-4-\lambda)(2\lambda-\lambda^2-1) + (\lambda-2) \right) =$$

$(2, 1)$

$$= \lambda(-8\lambda + 4\lambda^2 + 4 - 2\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda + \lambda - 2) = \lambda(\lambda^3 + 2\lambda^2 - 6\lambda + 2)$$

alternativamente (scorciatoia)

$$\begin{cases} -4+2z+2\cancel{x}^{\,z}+2\cancel{xz}=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=2 \\ x=0 \end{cases} \qquad (0,0,2)$$

λ	$\|A\|$	rA	C_∞	quadriche
$\lambda<-1$	$-$	4	ndr	iperboloidi ellittici
$\lambda=-1$	0	3	ndr	cono reale
$-1<\lambda<0$	+	4	ndr	iperboloidi iperbolici
$\lambda=0$	+	4	deg.	paraboloide iperbolico
$0<\lambda<\frac{1}{2}$	+	4	ndr	iperboloidi ip.
$\lambda=\frac{1}{2}$	0	3	ndr	cono reale
$\frac{1}{2}<\lambda<1$	+	4	ndr	iperboloidi ip.
$\lambda=1$	0	3	deg.	cilindro reale
$\lambda>1$	$-$	4	ndr	iperboloidi ell.