$$x^2+6y^2+4xy-2x+1=0$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$$ nondeg

$\det M_{00} = -10 < 0$ iperbole

Trovare gli asintoti

$$\begin{cases} X_1^2 - 6X_2^2 + 4X_1X_2 \cancel{-2X_1X_0} \cancel{+X_0^2} = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1^2 - 6X_2^2 + 4X_1X_2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

X_2^2

$$z = \frac{X_1}{X_2}$$

$$z^2+2z-6=0 \qquad z = -1 \pm \sqrt{1+6} = -1 \pm \sqrt{7}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = -1 \pm \sqrt{7} \qquad x_1 = \left(-1 \pm \sqrt{7}\right) x_2$$

punti impropri dell'iperbole:

$$P_{1\infty} \equiv \left(0, -1+\sqrt{7}, 1\right) \qquad P_{2\infty} \equiv \left(0, -1-\sqrt{7}, 1\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (-1+\sqrt{7}) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -1 + \left(1+\sqrt{7}\right)x + \left(-8+2\sqrt{7}\right)y = 0 \\ -1 + \left(1-\sqrt{7}\right)x + \left(-8-2\sqrt{7}\right)y = 0 \end{array}}$$

$x^2 - 2xy + y^2 - 6y - 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

M°_0

$\det M^\circ_0 = 0$ parabola

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

non deg

punti impropri

$\begin{cases} X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 - \cancel{6X_2X_0 - X_0^2} = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (X_1 - X_2)^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$ $P_\infty = (0,1,1)$

molteplicità 2

$-3X_0 = 0$

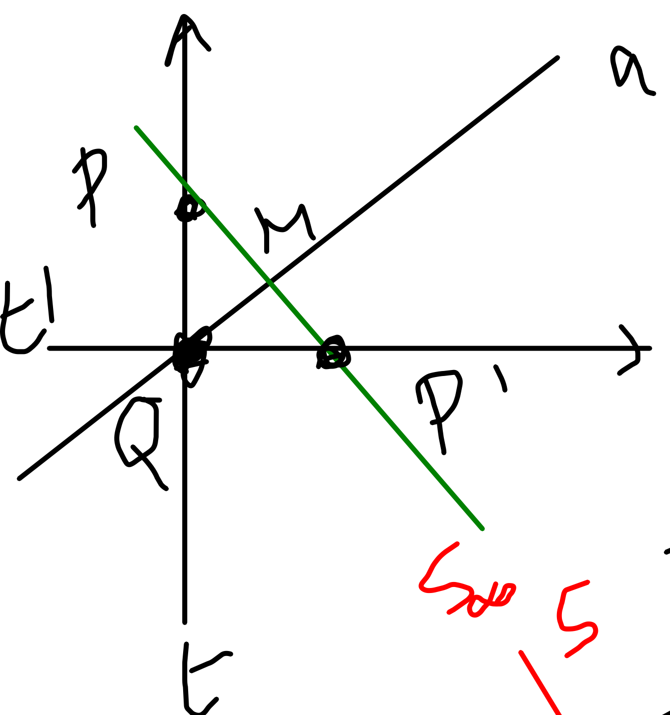
$$(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cancel{x}\ X_0 \\ \cancel{x}\ X_1 \\ \cancel{y}\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

$-3X_0 + 0X_1 + 0X_2 = 0$

$-3 + 0x + 0y = 0$

$-3 = 0$

Fascio di coniche aventi asse $a: x-y=0$ e aventi in $P\equiv(0,1)$ la retta $t: x=0$ come tangente.



r per $P \perp a$: $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-1}{-1}$ $\quad x=-y+1$

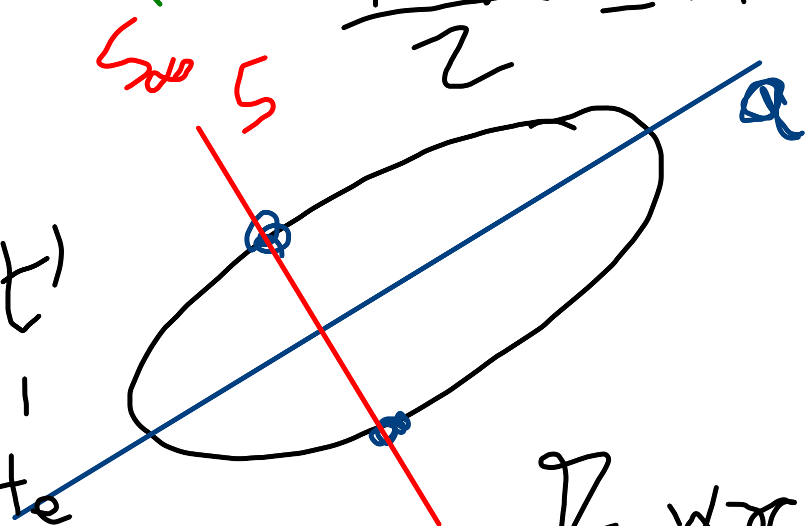
$x+y-1=0$

$r \cap a$: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x=y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-1=0 \\ x=y \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\dfrac{P+P'}{2} = M$ $\quad \dfrac{(0,1)+(\bar{x},\bar{y})}{2} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$(0,1)+(\bar{x},\bar{y}) = (1,1)$

$(\bar{x},\bar{y}) = (1,1)-(0,1) = (1,0)$



$r_1 = t \cup t'$

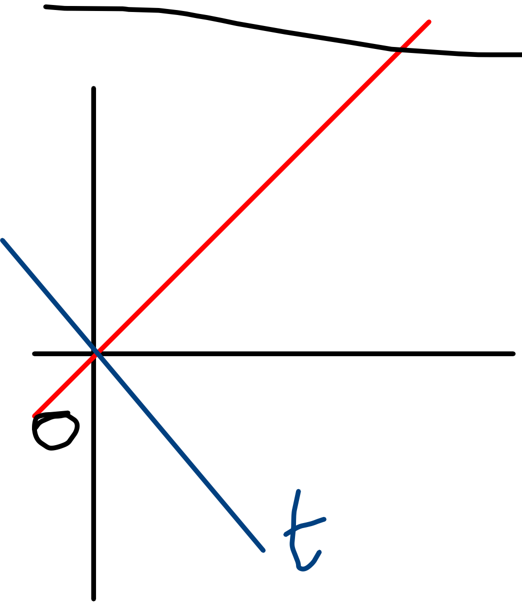
$r_2 = PP'$ 2 volte

$\mathcal{F}: \alpha x y + \beta(x+y-1)^2 = 0$

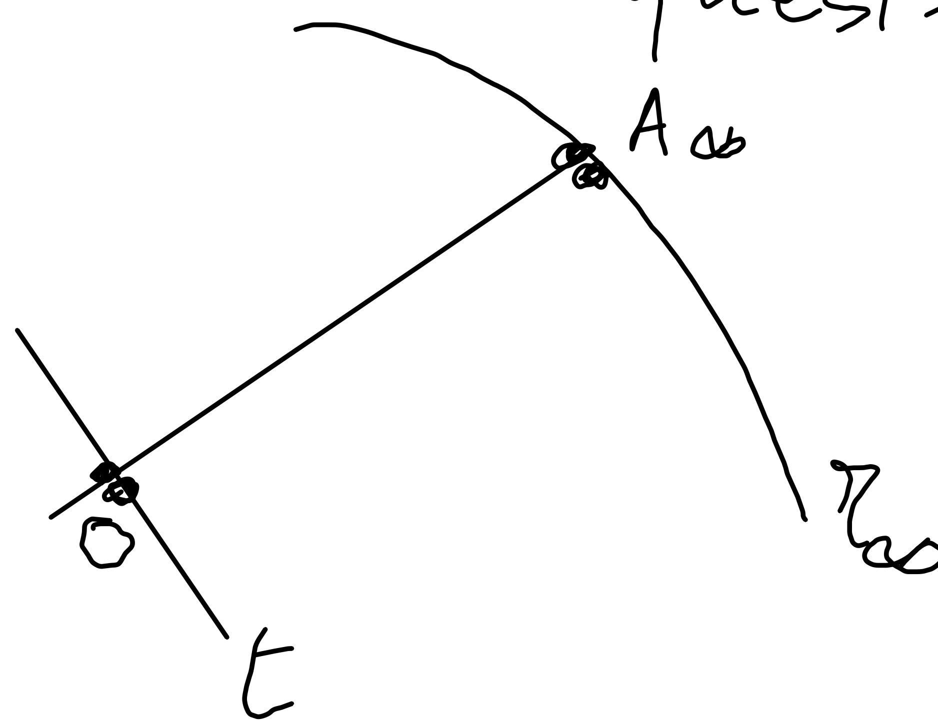
Fascio di parabole aventi asse $a: y=x$ e vertice $O\equiv(0,0)$

a è la polare di $S_\infty \equiv (0,1,-1)$

Il punto improprio $A_\infty \equiv (0,1,1)$ dell'asse è il centro di tutte queste parabole.



t per O, $\perp a$: $t: x+y=0$



$\Gamma_1 = t \cup r_\infty$

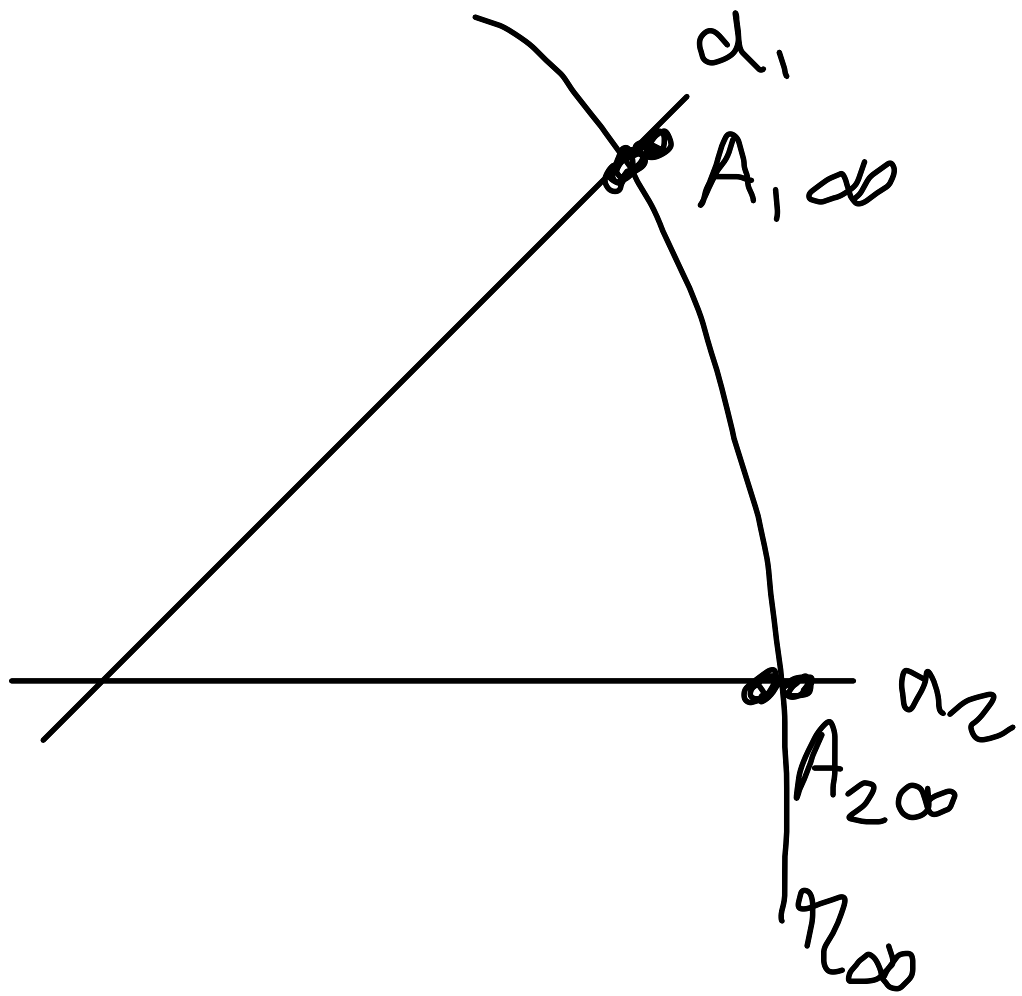
$\Gamma_2 = a$ 2 volte

$\mathcal{F}: \alpha(X_1+X_2)X_0 + \beta(X_1-X_2)^2 = 0$

$\mathcal{F}: \alpha(x+y) + \beta(x-y)^2 = 0$

Fascio di iperboli aventi asintoti $a_1 : x-y+1=0$ $\quad a_2 : y=0$

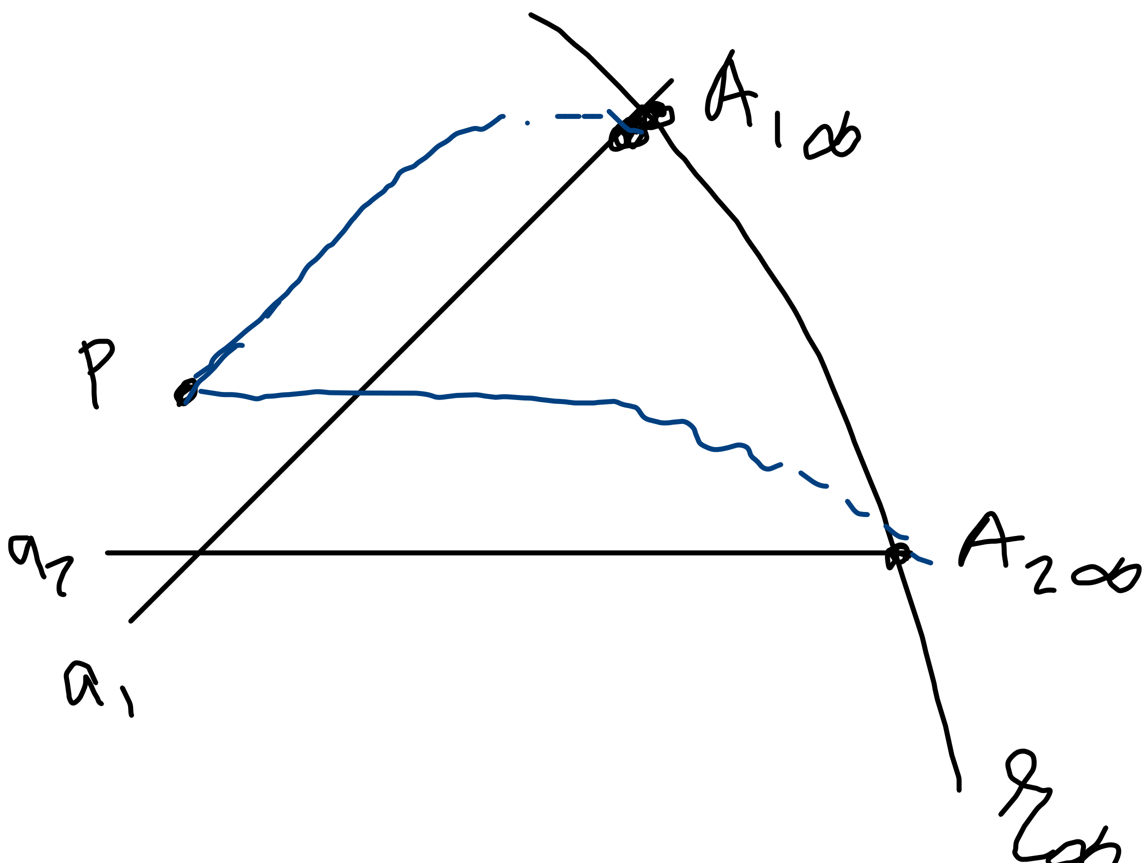
$\Gamma_1 = a_1 \cup a_2 \qquad \Gamma_2 = r_\infty$ 2 volte



$\mathcal{F} : \alpha\,(X_1 - X_2 + X_0)X_2 + \beta X_0^2 = 0$

$\mathcal{F} : \alpha\,(x-y+1)y + \beta = 0$

Fascio di iperboli passanti per $P \equiv (0,3)$, aventi $a_1: x-y+1$ come asintoto e l'altro asintoto parallelo ad $a_2: y=0$



$\Gamma_1 = PA_{1\infty} \cup A_{2\infty}A_{1\infty}$ r_∞

$\Gamma_2 = a_1 \cup PA_{2\infty}$

$PA_{1\infty}: 1(x-0)+(-1)(y-3)=0$

$x-y+3=0$

$PA_{2\infty}: y-3=0$

$\mathcal{F}: \alpha(X_1-X_2+3X_0)X_0+\beta(X_1-X_2+X_0)(X_2-3X_0)=0$

$\mathcal{F}: \alpha(x-y+3)+\beta(x-y+1)(y-3)=0$

05.17

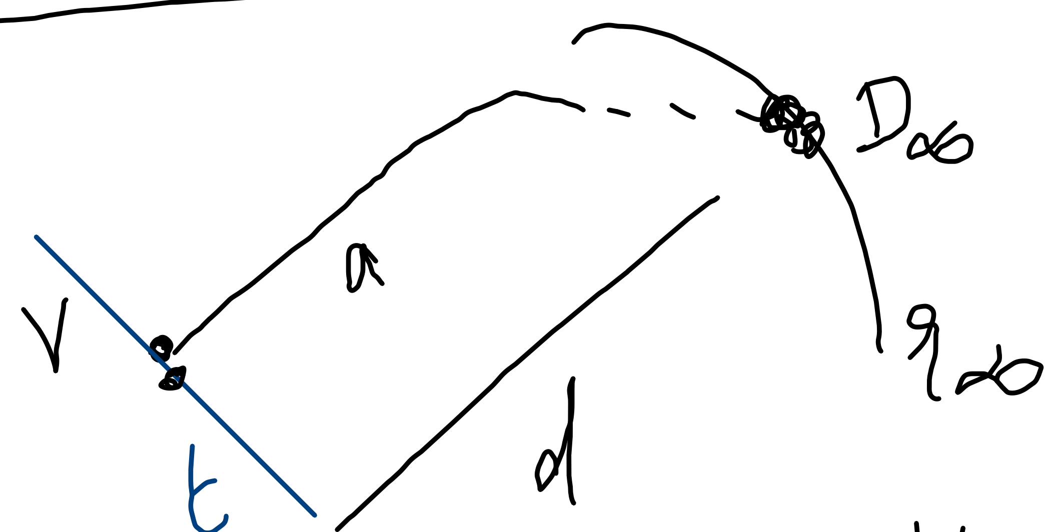
$r: y=0 \quad s: y=2x \quad \Gamma: 2xy-y^2-2x+3y+4=0$

Si scriva l'eq. del fascio di coniche passanti per i punti d'intersezione di Γ con r ed s

$$\mathcal{F}: \alpha(2xy-y^2-2x+3y+4)+\beta(y-2x)y=0$$

es2 Detta $\mathcal{P}$ la parabola tale che 1) $V\equiv(0,1)$ è vertice, 2) la retta d: $2x-y-2=0$ è un diametro, 3) d è il diametro coniugato alla direz. dell'asse coordinato x, se ne trovi l'equazione.

Trovo il fascio $\mathcal{F}$ di parabole soddisfacenti 1) e 2) poi al suo interno determino $\mathcal{P}$.



Trovo l'asse a come parallela ad d per V: $2(x-0)-(y-1)=0$ $\quad 2x-y+1=0$

Trovo t come $\perp$ ad a per V.

$t: \frac{x-0}{2}=\frac{y-1}{-1}$ $\quad -x=2y-2;\ x+2y-2=0$

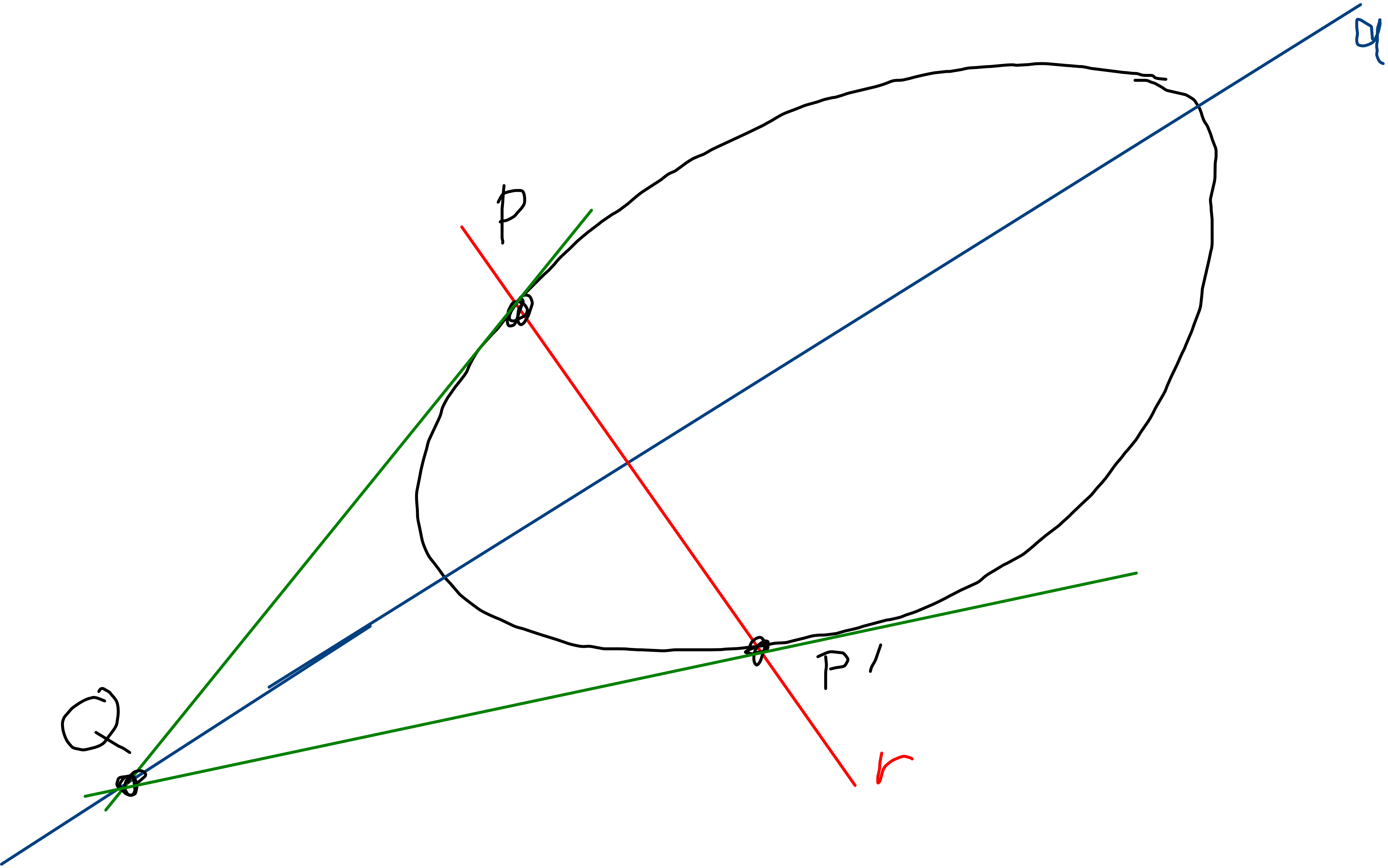
$\Gamma_1=t\cup q_\infty$ $\quad \Gamma_2=a$ 2 volte $\quad \mathcal{F}: \alpha(X_1+2X_2-2X_0)X_0+\beta(2X_1-X_2+X_0)^2=0$

$$F: \alpha(X_1+2X_2-2X_0)X_0+\beta(2X_1-X_2+X_0)^2=0$$

$$\alpha(X_1X_0+2X_2X_0-2X_0^2)+\beta(4X_1^2+X_2^2+X_0^2-4X_1X_2+4X_1X_0-2X_2X_0)=0$$

$$X_0^2(-2\alpha+\beta)+X_0X_1(\alpha+4\beta)+X_0X_2(2\alpha-2\beta)+$$
$$+X_1^2(4\beta)+X_1X_2(-4\beta)+X_2^2\beta=0$$

$$A=\begin{pmatrix} (\beta-2\alpha) & \frac{\alpha+4\beta}{2} & (\alpha-\beta) \\ \frac{\alpha+4\beta}{2} & 4\beta & -2\beta \\ (\alpha-\beta) & -2\beta & \beta \end{pmatrix}$$



P
P'
Q
q
r

$2x-y-z=0$ coniugata a / polare di $X_\infty \equiv (0,1,0)$

Basta imporre il coniugio fra X_∞ e un punto proprio di ~~d~~ d.

$D \equiv (1,0)$ è un punto proprio di d.

$(1,1,0)$

$$(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} \beta-2\alpha & \frac{\alpha+4\beta}{2} & (\alpha-\beta) \\ \frac{\alpha+4\beta}{2} & 4\beta & -2\beta \\ (\alpha-\beta) & -2\beta & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{\alpha+4\beta}{2}\quad 4\beta \quad -2\beta\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\frac{\alpha+4\beta}{2} + 4\beta = 0$ pongo $\beta = 1$

$\alpha + 12\beta = 0 \quad \alpha = -12\beta$

$\alpha = -12$

Completamento complesso di spazi (vettoriali, affini, euclidei, proiettivi, ...) reali.

Dato un tale spazio a coefficienti in $\mathbb{R}$, considero i suoi elementi come parte di un analogo spazio a coefficienti complessi.

Chiamo, in tale ambito, reale ogni elemento per cui esista una rappresentazione con numeri tutti reali, immaginario ogni elemento per cui ciò non sia possibile

Esempi: la retta $2ix-4iy+5i=0$ è reale, infatti si può esprimere come $2x-4y+5=0$

la retta $x-iy=0$ è immaginaria.

Il punto di coordinate omogenee $(3i, 2i, -5i)$ è reale, in quanto può essere espresso da $(3, 2, -5)$

il punto $(1, 2, -i)$ è immaginario.

Dato un qualsiasi elemento, il suo coniugato è quello ottenuto sostituendo a tutti i coefficienti complessi i loro complessi coniugati

Prop - Se le intersezioni di due elementi reali sono immaginarie, allora formano coppie coniugate.

Prop. - Su ogni retta proiettiva immaginaria c'è esattamente un punto reale

---

DIM - $r: \; (a+ib)X_1 + (c+id)X_2 + (e+if)X_0 = 0$

interseco con la coniugata $\bar{r}: \; (a-ib)X_1 + (c-id)X_2 + (e-if)X_0 = 0$

somma) $2aX_1 + 2cX_2 + 2eX_0 = 0$

differenza) $2ibX_1 + 2idX_2 + 2ifX_0 = 0$

$$\begin{cases} aX_1 + cX_2 + eX_0 = 0 \\ bX_1 + dX_2 + fX_0 = 0 \end{cases}$$

Prop.: L'intersezione di ogni circonferenza con la retta impropria è costituita da due punti immaginari $C_1 \equiv (0,1,i)$, $C_2 \equiv (0,1,-i)$ detti punti ciclici.

DIM - $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\begin{cases} X_1^2+X_2^2+\cancel{aX_1X_0}+\cancel{bX_2X_0}+\cancel{cX_0^2}=0 \\ X_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2^2=-X_1^2 \\ X_0=0 \end{cases}$$

Ridefiniamo circonferenza ogni conica passante per i punti ciclici

(ci rientrano anche porcherie come $x^2+y^2=0$, con immagine reale data da un solo punto e $x^2+y^2+1=0$ con immagine reale vuota)

Nello spazio, analogamente, ogni sfera interseca il piano improprio nel cerchio assoluto (o conica assoluta) dello spazio: $\begin{cases} X_1^2+X_2^2+X_3^2=0 \\ X_0=0 \end{cases}$

Esso è l'insieme dei punti ciclici di tutti i piani.

I fuochi di una conica sono definiti come i punti reali di intersezione fra le tangenti condotte alla conica dai punti ciclici.