In $\mathbb{R}P^4$ mi chiedo se i seguenti punti sono lin. dip. o indip.:

$$P_0 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right], \quad P_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \quad P_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Studio il rango della matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad |M| \neq 0$$

$$O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |O_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad |O_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |O_3| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rho(A) = 2$$

Trovare il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}'$ di $\mathbb{R}P^4$ generato da P_0, P_1, P_2 (cioè il sottospazio pr. di minima dimensione contenente P_0, P_1, P_2).

$\mathbb{P}'$ ha le stesse equazioni cartesiane del sottospazio vettoriale V' generato dai tre vettori rappresentanti dei punti. Ho già selezionata, mediante il Teor. di Kronecker, una base di V'; impongo rango $= 2$:

$$
r\begin{pmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \\ x_2 & & \\ x_3 & 1 & -1 \\ x_4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & -1 & 0 \\ x_4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \quad \mathbb{P}': \begin{cases} x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\[2ex] x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\[2ex] -x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}
$$

sp. vett. $v \in V$ dim = n

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\begin{tikzcd} v \arrow[d, mapsto] & V \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

base ordinata $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

sp. vett. euclideo

$$\begin{tikzcd} (V, \langle , \rangle) \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{nat}) \end{tikzcd}$$

base ordinata ortonormale

Sp. affine

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{R}}"] \\ \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\dim = n$

riferimento affine

sp. affine

Sp. euclideo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{R}}"] \\ \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\dim = n$

riferimento cartesiano

sp. euclideo

Sp. proiettivo $\mathbb{P}$ dim $= n$ $\quad \mathbb{P} = (V, \mathbb{P}, \varphi)$

dim $= n+1$

$$\mathbb{P} \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{S}}} \mathbb{R}P^n$$

riferimento proiettivo

Sia $\mathbb{P} = \mathbb{R}P^1$. Siano $A_0 = \left[\underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}_{v_0}\right]$, $A_1 = \left[\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}}_{v_1}\right]$, $U = \left[\underbrace{\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}}_{u}\right]$.

a) Si verifichi che $\mathcal{S} = (A_0, A_1, U)$ è un rif. pro.

b) Si trovi una base $\overline{\mathcal{B}} = (\overline{v}_0, \overline{v}_1)$ normalizzata rispetto al riferimento $\mathcal{S} = (A_0, A_1, U)$

c) Dato il punto $P = \left[\underbrace{\begin{pmatrix}2\\30\end{pmatrix}}_{w}\right]$ se ne trovino coordinate omogenee rispetto ad $\mathcal{S}$.

---

a) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 10\\3 & 2 & 6\end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix}-2 & 10\\2 & 6\end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix}1 & 10\\3 & 6\end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix}1 & -2\\3 & 2\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{S}$ è un rif. pro.

b) Devo trovare $\overline{v}_0 = \alpha v_0$, $\overline{v}_1 = \beta v_1$ tali che $\overline{v}_0 + \overline{v}_1 \sim u$ in particolare scelgo proprio u nella sua classe di proporzionalità,

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}\qquad \begin{cases}\alpha-2\beta=10\\3\alpha+2\beta=6\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha-2\beta=10\\8\beta=-24\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=10+2\beta=10-6=4\\ \beta=-3\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha=4\\ \beta=-3\end{cases}\qquad \overline{\mathcal{B}}=\left(\underbrace{\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}}_{\overline{v}_0=},\underbrace{\begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix}}_{\overline{v}_1=}\right)$$

o anche $\tilde{\mathcal{B}}=\left(\underbrace{\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}}_{\tilde{v}_0=},\underbrace{\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}}_{\tilde{v}_1=}\right)$

c) Cerco X_0, X_1 tali che $X_0\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}+X_1\begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\30\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}4X_0+6X_1=2\\12X_0-6X_1=30\end{cases}\qquad \begin{cases}4X_0+6X_1=2\\-24X_1=24\end{cases}\qquad \begin{cases}X_0=\dfrac{2-6X_1}{4}=\dfrac{2+6}{4}=2\\X_1=-1\end{cases}$$

$$w\equiv_{\overline{\mathcal{B}}}(2,-1)\qquad P\equiv_{\mathcal{G}}(2,-1)$$