$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_0^2 = 0$$

Una (quasi) generica conica di rango 1 :

$$(X_0, X_1, X_2)\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha\beta \\ \beta & \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$X_0^2 + 2\alpha X_0 X_1 + 2\beta X_0 X_2 + \alpha^2 X_1^2 + 2\alpha\beta X_1 X_2 + \beta^2 X_2^2 = 0$$

$$\|$$

$$(X_0 + \alpha X_1 + \beta X_2)^2$$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad x_0^2+x_1^2+x_2^2=0 \qquad x_0=\pm\sqrt{-x_1^2-x_2^2}$

$\bar P \equiv (\bar x_0, \bar x_1, \bar x_2) \in I_m \qquad \bar x_0^2+\bar x_1^2+\bar x_2^2=0$

Polare di $\bar P$

$$(\bar x_0\ \bar x_1\ \bar x_2)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$$

$$\bar x_0 x_0+\bar x_1 x_1+\bar x_2 x_2=0$$

Suppongo $r \subset I_m \qquad r(\bar P)=r$

Prendo 3 punti di r

$B\equiv(0, \bar x_2, -\bar x_1)$, $C\equiv(\bar x_2, 0, -\bar x_0)$, $D\equiv(\bar x_1, -\bar x_0, 0)$

Dovrò avere $B, C, D \in I_m$

$\bar x_2^2+\bar x_1^2=0 \qquad \bar x_2^2+\bar x_0^2=0 \qquad \bar x_1^2+\bar x_0^2=0$

$\bar x_2=\pm i\bar x_1 \qquad \bar x_2=\pm i\bar x_0 \qquad \bar x_1=\pm i\bar x_0$

$\cancel{i}\bar x_1=\cancel{i}\bar x_0$

$\bar x_1 = i\bar x_0$

$\Rightarrow$

$\bar x_1 = i\bar x_1$

$\bar x_1(1-i)=0$

$\Rightarrow \bar x_1=0 \quad \bar x_2=0 \quad \bar x_0=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$$

$Im: \overline{X}_0^2+\overline{X}_1^2+\overline{X}_2^2+0X_3^2=0$

$$W: \begin{cases} x_0=0 \\ x_1=0 \\ x_2=0 \\ 0=0 \end{cases} \qquad V=(0,0,0,1)$$

$$\Gamma: \begin{cases} X_0^2+X_1^2+X_2^2=0 \\ X_3=0 \end{cases}$$

Considero i punti di $Im \cap (X_3=0)$ Γ

Prendo il generico punto di Γ: $\overline{P}\equiv(\overline{X}_0,\overline{X}_1,\overline{X}_2,0)$

Considero il generico punto Q $\neq V,\overline{P}$ della retta $V\overline{P}$

$$Q\equiv\alpha(0,0,0,1)+\beta(\overline{X}_0,\overline{X}_1,\overline{X}_2,0)=(\beta\overline{X}_0,\beta\overline{X}_1,\beta\overline{X}_2,\alpha)$$

Mi chiedo: $Q\in Im$? Verifica se soddisfa l'eq

$$(\beta\overline{X}_0)^2+(\beta\overline{X}_1)^2+(\beta\overline{X}_2)^2+\cancel{0\cdot\alpha^2}=\beta^2(\overline{X}_0^2+\overline{X}_1^2+\overline{X}_2^2)=\beta^2\cdot 0=0$$

Sì

Classificazione delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Rango 1

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(1,0)$ $(0,1)$

Im: $X_0^2 = 0$ Una retta "contata 2 volte"

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ La stessa retta

Rango 2

$(2,0)$ $(0,2)$

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$ Un punto

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Lo stesso punto

$(i,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$Im: X_0^2 - X_1^2 = 0$ Unione di due rette

$(X_0+X_1)(X_0-X_1)=0$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Un punto: l'intersezione delle 2 rette

---

Rango 3

$(3,0)$ $(0,3)$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$Im: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ $\emptyset$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

conica "vuota" o "immaginaria"

$(2,1)$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $(1,2)$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}: X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$ Insieme di infiniti punti non contenente rette

conica non degenere "reale"

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

Classificazione delle quadriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

Rango 1

$(1,0)$ $(0,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 = 0$ Un piano "contato due volte"

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La stesso piano

Rango 2

$(2,0)$ $(0,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$ Una retta

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La stessa retta

$(1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 - X_1^2 = 0$ Unione di 2 piani

$(X_0+X_1)(X_0-X_1)=0$

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Una retta: l'intersezione dei due piani

---

Rango 3

$(3,0)$ $(0,3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ Un punto

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Lo stesso punto

"Cono immaginario" proiettivo

$(2,1)$ $(1,2)$

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Im: $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$ L'unione di ∞ rette generatrici passanti per un punto, non contenente piani

"cono reale proiettivo"

W: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Un punto: quel punto!

Rango 4

$(4,0)$ $(0,4)$

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Im: $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ $\emptyset$

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

$(3,1)$ $(1,3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}: X_0^2+X_1^2+X_2^2-X_3^2=0$

Insieme di ∞ punti non contenente piani, non contenente rette "quadrica ellittica"

$$W: \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \qquad \emptyset$$

$(2,2)$

$\mathrm{Im}: X_0^2+X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \\ -X_3 = 0 \end{cases} \qquad \emptyset$$

Insieme di ∞ punti non contenente piani e tale che, per ogni suo punto, passano due rette generatrici contenute nell'immagine "quadrica iperbolica"

Una forma quadratica $q: V \to \mathbb{R}$ è detta

definita positiva se $\forall v \in V - \{\vec{0}\}$ $q(v) > 0$

" negativa " " $q(v) < 0$

indefinita altrimenti

NOTA - Solo le classi di "proporzionalità" delle forme definite positive o negative sono iperquadriche a immagine vuota.

PROP- Una forma quadratica $q: V^n \longrightarrow \mathbb{R}$ risulta

definita positiva $\Longleftrightarrow \sigma(q) = (n,0) \Longleftrightarrow$ il pol. car. ha solo variazioni

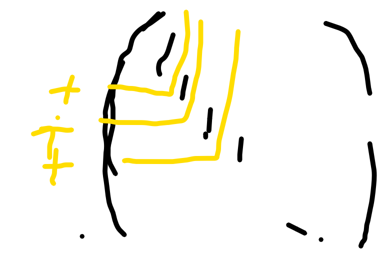
" negativa $\Longleftrightarrow \sigma(q) = (0,n) \Longleftrightarrow$ il pol. car. ha solo permanenze

---

In una matrice A, i suoi minori formati intersecando certe righe di A con le colonne aventi gli stessi indici si dicono minori <u>principali</u>

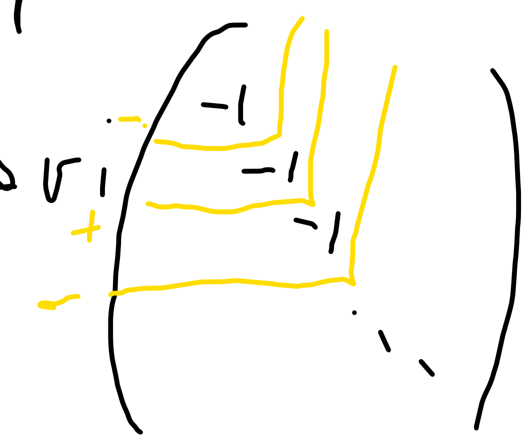
TEOR (criterio di Sylvester) – Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica, siano $M_1, \dots, M_n$ dei suoi minori principali ognuno contenuto nel successivo (ogni M_i di ordine i)

Allora A rappresenta una forma quadratica



definita positiva $\iff \forall i \quad |M_i| > 0$

definita negativa $\iff \forall i \begin{cases} |M_i| < 0 & i \text{ dispari} \\ |M_i| > 0 & i \text{ pari} \end{cases}$



$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$|M_1| = |1| > 0$ +

$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} < 0$ −

$|M_3| = 4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} < 0$ −

indefinita

$|M_1| = |4| > 0$ +

$|M_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0$ +

$|M_3| < 0$ −

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$|M_1| = |1| > 0$ +

$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$ +

$|M_3| = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$ +

def. positiva

$|M_1| = |4| > 0$

$|M_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0$

$|M_3| > 0$

$|M_1| = |1| > 0$

$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0$

$|M_3| > 0$

Due utili condizioni NECESSARIE ma non sufficienti:

PROP - A def. pos. $\Longrightarrow$ gli elementi della diag principale sono positivi

PROP - A def. neg. $\Longrightarrow$ gli elementi della diag. principale sono negativi

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 5 & 4 \\ 5 & \boxed{-3} & 8 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$ indefinita

---

Affinità di $\mathbb{A}^n$: ogni applicazione del tipo

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ - & - & - \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

regolare se det $\neq 0$

$$x_1 = \frac{X_1}{X_0} \qquad x_1' = \frac{X_1'}{X_0'}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_n = \frac{X_n}{X_0} \qquad x_n' = \frac{X_n'}{X_0'}$$

Posso vedere un'affinità (regolare) come restrizione ad $\mathbb{A}^n$ di una omografia dell'ampliamento proiettivo di $\mathbb{A}^n$:

$$\lambda \begin{pmatrix} X_0' \\ X_1' \\ \vdots \\ X_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots \\ b_n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda X_0' &= X_0 \\ \lambda X_1' &= b_1 X_0 + a_1^1 X_1 + \cdots + a_n^1 X_n \\ &\vdots \\ \lambda X_n' &= b_n X_0 + a_1^n X_1 + \cdots + a_n^n X_n \end{aligned}$$

divido a sinistra per $\lambda X_0'$ e a destra per X_0:

$$1 = \frac{\lambda X_0'}{\lambda X_0'} = \frac{X_0}{X_0} = 1$$

$$x_1' = \frac{\lambda X_1'}{\lambda X_0'} = \frac{b_1 X_0}{X_0} + a_1^1 \frac{X_1}{X_0} + \cdots + a_n^1 \frac{X_n}{X_0}$$

$$= b_1 + a_1^1 x_1 + \cdots + a_n^1 x_n$$

$$\vdots$$

$$x_n' = \underline{\qquad\qquad}$$