Classificare proiett. la conica in $\mathbb{R}$

$$x_0^2 + 4x_0x_2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-3\lambda + \lambda^2 - 1) + 2(2\lambda) =$$

$$= -3\lambda + \lambda^2 - 1 + 3\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

$\sigma = (2,1)$ conica non degen. reale

Classificazione proiettiva delle iperq. di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Rango 1

$(1,0)$ $(0,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Im: $X_0^2 = 0$ Un punto

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Lo stesso punto

Rango 2

$(2,0)$ $(0,2)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$ $\emptyset$

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

$(1,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Im: $X_0^2 - X_1^2 = 0$ Due punti

$(X_0+X_1)(X_0-X_1)=0$

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

$$\Gamma \begin{cases} \cancel{a_{00}X_0^2} + \cancel{2a_{01}X_0X_1} + \cancel{2a_{02}X_0X_2} + a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \quad \Gamma_\infty$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$= a_{01}$

$$\Gamma_\infty \begin{cases} a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

discriminante di Γ_∞:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = M_{\infty}$$

$|M_\infty| = 0 \iff \Gamma_\infty$ specializzata (1 punto)

$\iff \Gamma$ tangente a r_∞

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$$

$a_{21} = a_{12}$

$\alpha = -\mathrm{Tr}(M_\infty)$
$= -a_{11} - a_{22}$

$\beta = \det M_\infty$
$= A_{00}$

$\beta > 0$, Γ_∞ $\emptyset$	$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$		
	$\alpha < 0$	$+\ +$	$(2,0)$ def $+$
	$\alpha > 0$	$-\ -$	$(0,2)$ def $-$
$\beta < 0$, Γ_∞ 2 pti	$\alpha > 0$	$-\ +$	
	$\alpha < 0$	$+\ -$	$(1,1)$ indef

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \dfrac{-a_{12}x_2 \pm \sqrt{a_{12}a_{21}x_2^2 - a_{11}a_{22}x_2^2}}{2a_{11}} \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{4} = x_2^2\left(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}\right) = -|M_{00}|$$

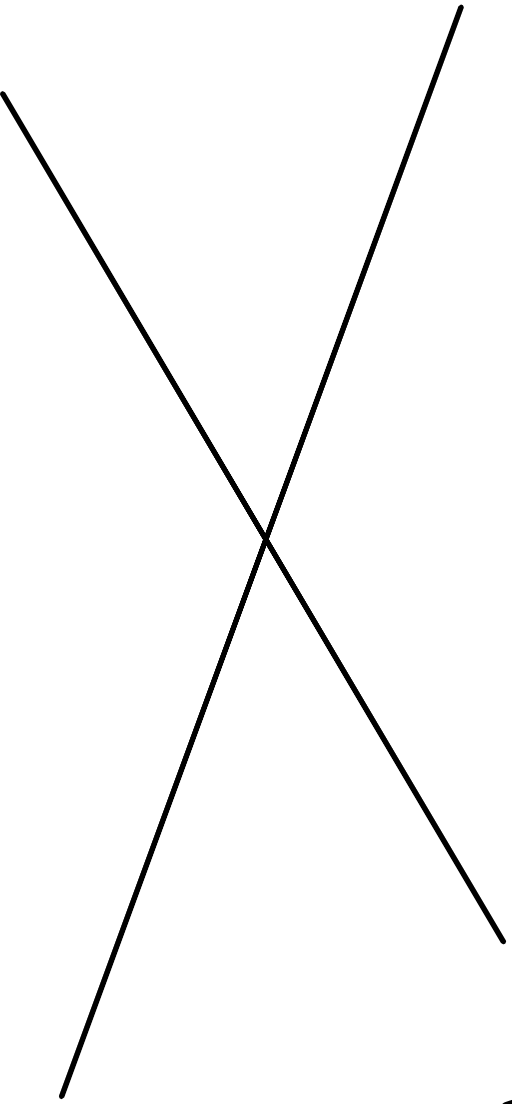
2 punti

$$\Updownarrow$$

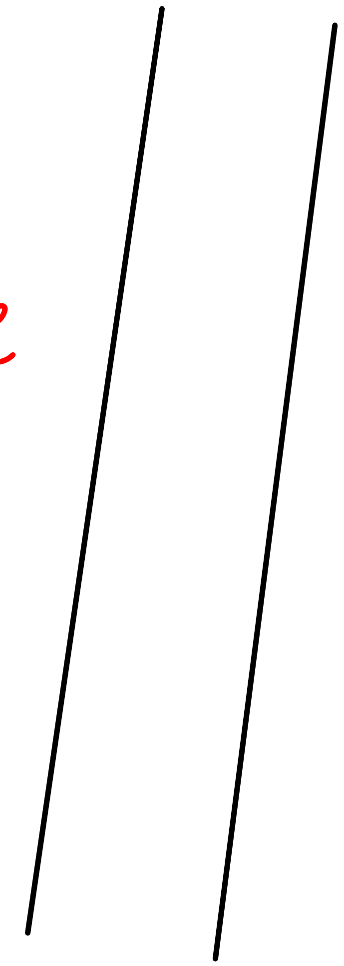
$$\Delta > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$|M_{00}| < 0$$



NON sono affinemente equivalenti



$xy = 0$

è aff. eq.

$x^2 - y^2 = 0$

$(x-y)(x+y) = 0$

$x(x-1) = 0$ è aff. eq. a $(x-y)(x-y+1) = 0$

$x^2 - x = 0$ $\qquad$ $x^2 + y^2 - 2xy + x - y = 0$

Data la conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ espressa in coord. ~~aff.~~

$$a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

qual è, in coord. proiett., la corrispondente conica dell'ampliamento proiett. $\mathbb{P}^2$?

$$x = \frac{X_1}{X_0} \quad y = \frac{X_2}{X_0}$$

$$a_{00} + 2a_{01}\frac{X_1}{X_0} + 2a_{02}\frac{X_2}{X_0} + a_{11}\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2 + 2a_{12}\frac{X_1}{X_0}\frac{X_2}{X_0} + a_{22}\left(\frac{X_2}{X_0}\right)^2 = 0$$

$X_0^2 \cdot$

$$a_{00}X_0^2 + 2a_{01}X_1X_0 + 2a_{02}X_2X_0 + a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0$$

$$(X_0, X_1, X_2) \rightsquigarrow (t, x, y)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ & \end{pmatrix}$$

Classificare affinemente, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, le coniche: $\lambda x^2 - 2x + (1-\lambda) y^2 = 0$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$|A_\lambda| = 0 + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} + 0 = \lambda - 1$$

Cerco le degeneri: $|A_\lambda| = 0 \iff \lambda = 1$

$$A_{00} = |M_{00}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^2 \geq 0 \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

rango = 2

dice che $\forall \lambda$ la forma quadratica è indefinita

λ	$\lvert A \rvert$	Γ_∞ A_{00}	coniche
$\lambda < 0$	$\neq 0$	$-$	iperboli
$\lambda = 0$	$\neq 0$	0	parabola
$0 < \lambda < 1$	$\neq 0$	$+$	ellissi reali
$\lambda = 1$	$= 0$	0	deg. rango 2
$\lambda > 1$	$\neq 0$	$-$	iperboli

Classifica le coniche di discriminanti A_γ per $\gamma \in \mathbb{R}$

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma \\ 0 & (\gamma-1) & 0 \\ -\gamma & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\gamma-1)$$

Cerco le degeneri:

$$|A_\gamma| = (\gamma-1)\begin{vmatrix} \gamma & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{vmatrix} = (\gamma-1)(\gamma-\gamma^2) = -\gamma(\gamma-1)^2 = 0 \iff \gamma=0 \vee \gamma=1$$

deg.

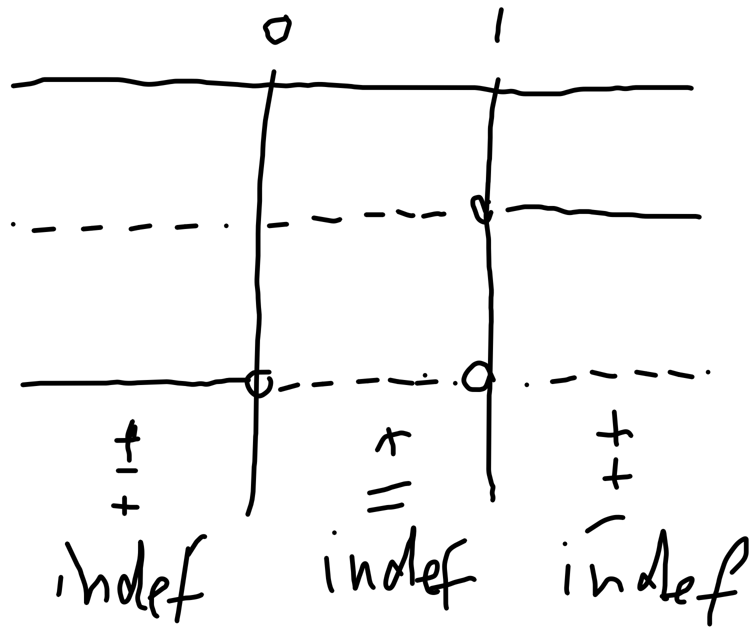
$\gamma=0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rango $=2$ $\qquad$ $\gamma=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rango $=1$

$$A_{\infty} = \begin{vmatrix} (\gamma-1) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \gamma-1 \geq 0 \iff \gamma \geq 1$$

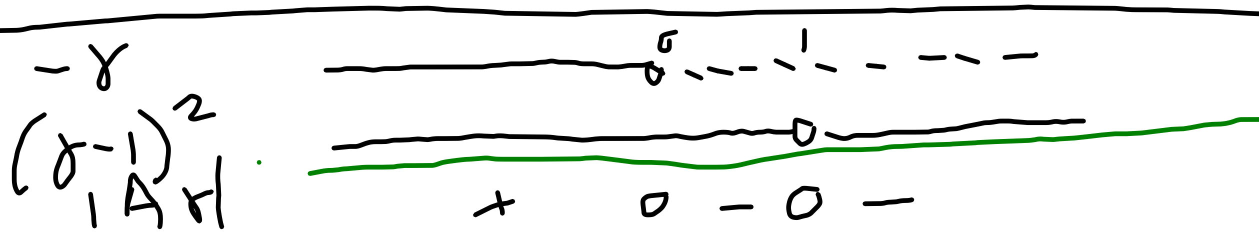
$|M_1| = \det(1) > 0 \ \forall \gamma$

$|M_2| = \det\begin{pmatrix} (\gamma-1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0 \iff \gamma > 1$

$|M_3| = -\gamma(\gamma-1)^2$



γ	$\lvert A \rvert$	A_∞	coniche
$\gamma<0$	$\neq 0$	$-$	iperboli
$\gamma=0$	$=0$	$-$	deg rango 2
$0<\gamma<1$	$\neq 0$	$-$	iperboli
$\gamma=1$	$=0$	0	deg rango 1
$\gamma>1$	$\neq 0$	$+$	ellissi reali



Conica vuota : $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ det > 0 $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ det < 0

Quadrica vuota , $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ det > 0 $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ det > 0

Quadrica iperbolica $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ det > 0

Quadrica ellittica $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ det < 0 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ det < 0

Quadriche (specializzate) di rango 3

Proiettivamente: $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ cono proiett. immaginario: 1 punto V

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ cono proiettivo reale: unione di rette per un punto V

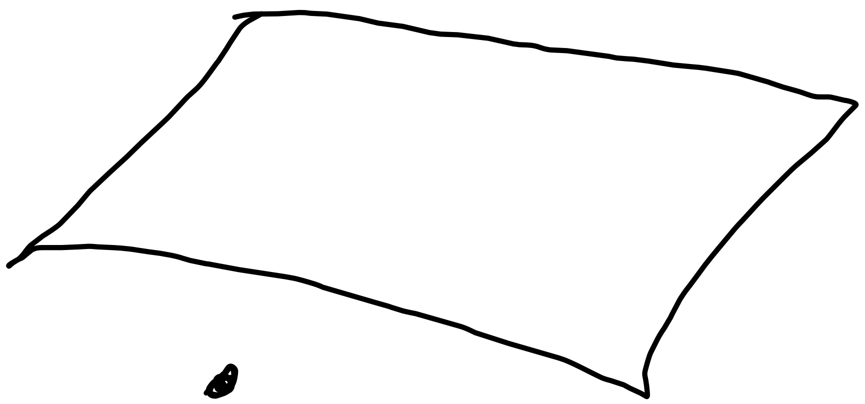
(V è l'unico punto del vertice w)

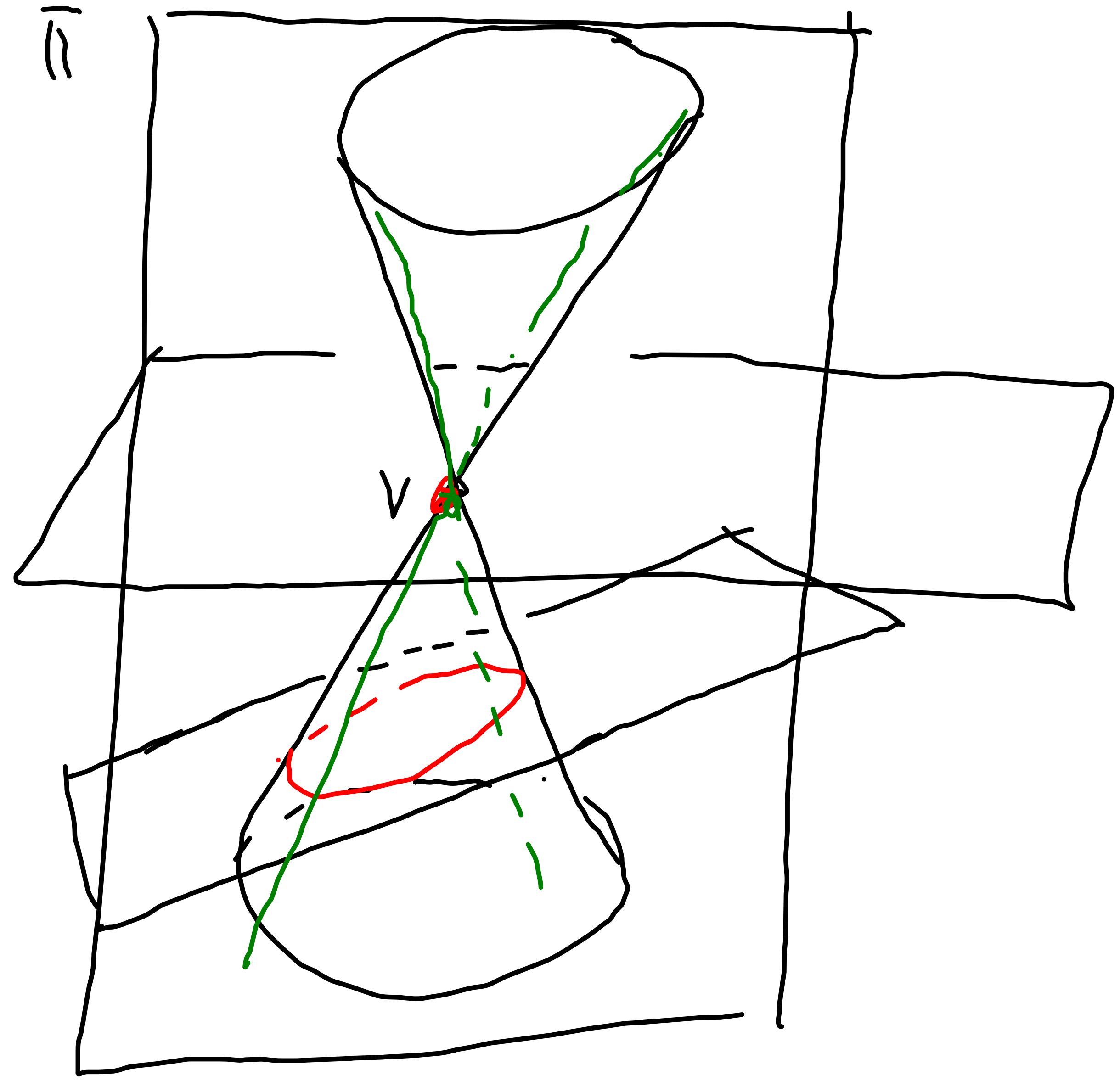
Affinemente distinguiamo

cilindro (immaginario o reale) se V è impropria

cono affine (immaginario o reale) se V è propria

PROP - Se Q è un cono proiettivo (reale o imm.) con vertice V e π è un piano, allora la conica $Q \cap \pi$ è degenere $\iff V \in \pi$





COR - Una quadrica affine di rango 3 è un cilindro $\iff \mathcal{Q}_\infty$ è degenere $\iff A_{00} = 0$

$\mathcal{Q}_\infty = \mathcal{Q} \cap \Pi_\infty$

DIM - $\mathcal{Q}$ cilindro $\iff \Pi_\infty$ contiene $V \iff \mathcal{Q} \cap \Pi_\infty$ è una conica deg. di $\Pi_\infty \iff |M_{\infty}| = 0$

M_∞ è il discriminante di $\mathcal{Q}_\infty$