Classificare le quadriche, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(3\lambda-1)x^2 + (1-\lambda)y^2 + 2\lambda xz + 2z - 4\lambda = 0$$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -4\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (3\lambda-1) & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rivela che A_λ sempre indef.

$$|A_\lambda| = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -4\lambda & 0 & 1 \\ 0 & (3\lambda-1) & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -4\lambda & 0 & 1 \\ 4\lambda^2 & (3\lambda-1) & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4\lambda^2 & (3\lambda-1) \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4\lambda^3-3\lambda+1) =$$

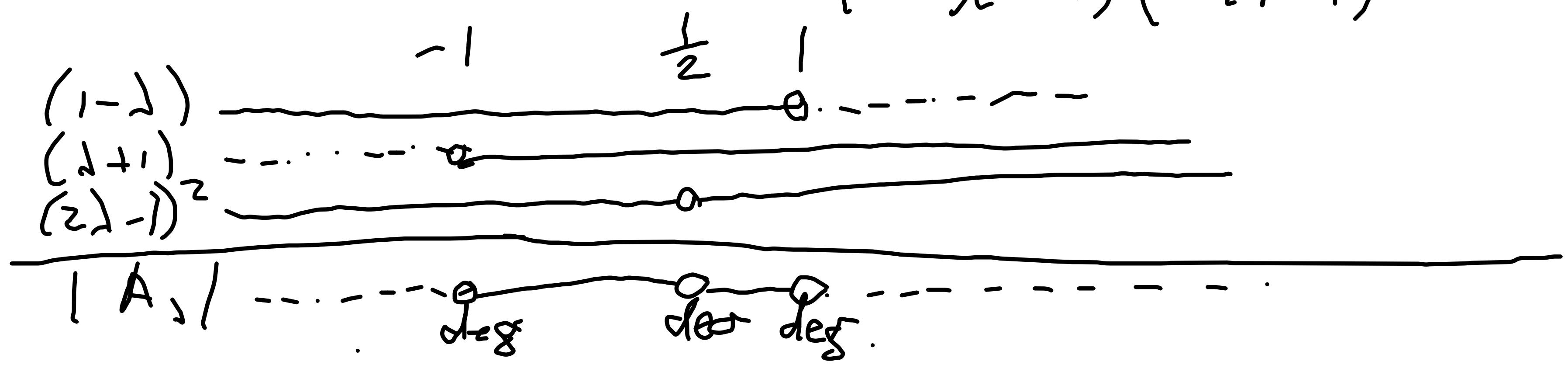
$$= (1-\lambda)(\lambda+1)(4\lambda^2-4\lambda+1) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda+1)(2\lambda-1)^2$$

Se ci sono radici razionali di $4\lambda^3-3\lambda+1$, esse sono nella lista:

$\pm\frac{1}{1}$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$

	4	0	-3	1
-1		-4	+4	-1
	4	-4	+1	0



$$M_{00} = \begin{pmatrix} (3\lambda-1) & 0 & \lambda \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* rivela che M_{00} è sempre indefinita $\Rightarrow$
$\Rightarrow Q_\infty$ mai vuota

$\lambda = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M

$$|M| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} -4 + 2z + 2x^2 + 2xz = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4 + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$A_{00} = |M_{00}| = (1-\lambda)\begin{vmatrix} (3\lambda-1) & \lambda \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)$$

λ^2 ——— 0 ———

$\lambda - 1$ - - - - - - - 0 ———

$|M_{00}|$ - - - 0 - - - 0 ———

λ	$\lvert A_\lambda \rvert$	r	A_{00}	quadriche
$\lambda < -1$	$-$	4	$\neq 0$ *	iperboloidi ell.
$\lambda = -1$	0	3	$\neq 0$ *	cono reale
$-1 < \lambda < 0$	$+$	4	$\neq 0$ *	iperboloidi ip.
$\lambda = 0$	$+$	4	0	paraboloide ip.
$0 < \lambda < \frac{1}{2}$	$+$	4	$\neq 0$ *	iperboloidi ip.
$\lambda = \frac{1}{2}$	0	3	$\neq 0$ *	cono reale
$\frac{1}{2} < \lambda < 1$	$+$	4	$\neq 0$ *	iperboloidi ip.
$\lambda = 1$	0	3	0	cilindro reale
$\lambda > 1$	$-$	4	$\neq 0$ *	iperboloidi ell.

PROP - I diametri di una parabola sono fra loro paralleli.

DIM - Sia Γ la parabola. Γ è tangente a r_∞ in un punto P_∞. Ma allora P_∞ è il polo di r_∞ rispetto a Γ, cioè è il centro di Γ.
Tutti i diametri, per reciprocità, passano per P_∞, ma allora sono paralleli

Es 4 $\quad \Gamma: x^2 - 6xy + 9y^2 - 8y + 1 = 0 \quad \left\{ X_1^2 - 6X_1X_2 + 9X_2^2 - \cancel{8X_0X_2} + \cancel{X_0^2} = \right.$

$X_0 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ non deg.}$$

$M_\infty =$

$$A_{\infty} = |M_{\infty}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{parabola}$$

$$\begin{cases} (X_1 - 3X_2)^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

$P_\infty \equiv (0, 3, 1)$

è il punto di tang. fra r_∞ e Γ

il centro di Γ

$Q_\infty = (0, 1, 1)$

polare: $\quad (0\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$

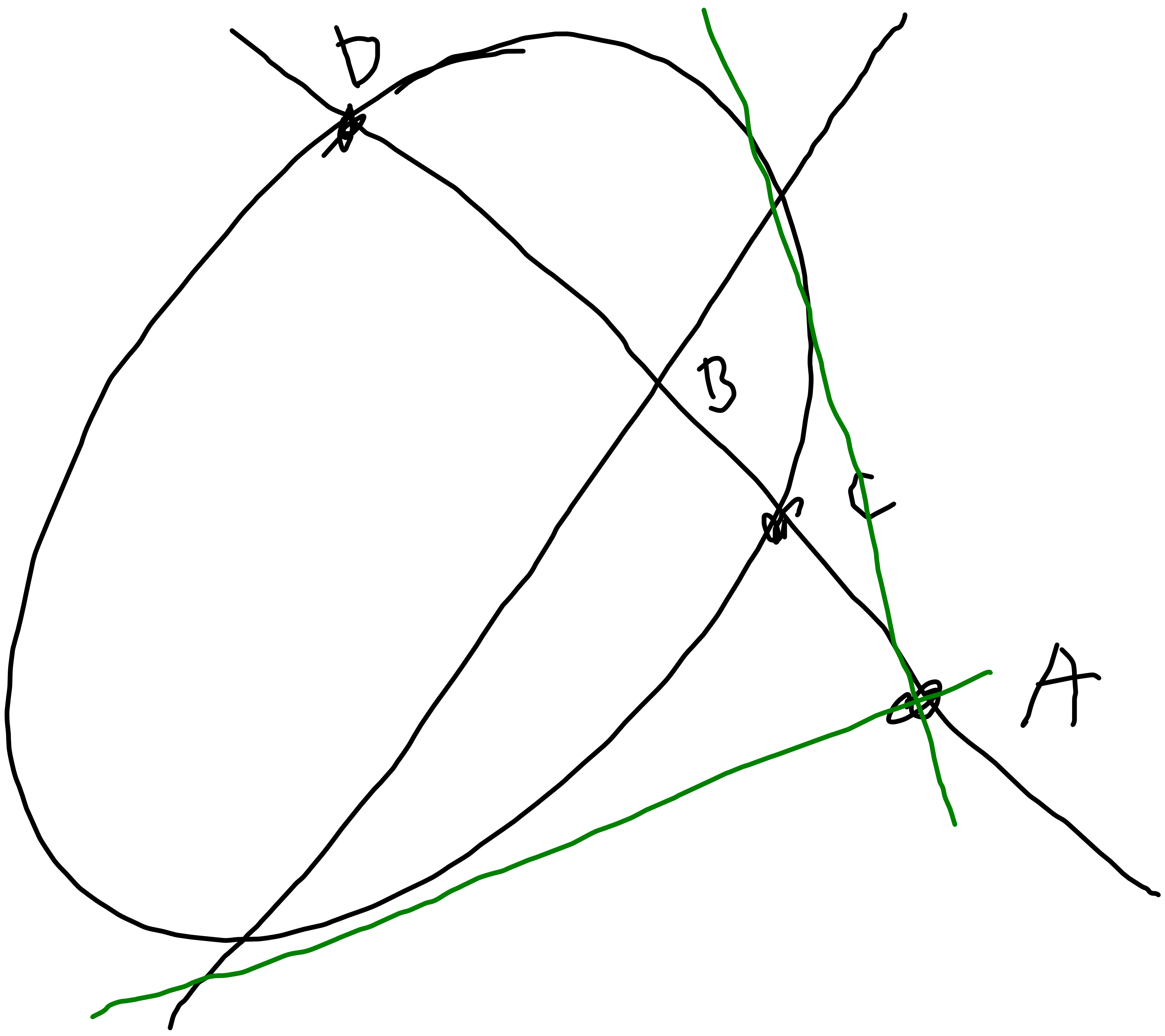
$(0\ 0\ 1)$

$-4 - 2x + 6y = 0 \quad (l, m) = (6, 2)$

$R_\infty = (0, 0, 1) \quad -4 - 3x + 9y = 0 \quad (l, m) = (9, 3)$

PROP - Q iperpar.; gli iperpi. diam. sono paralleli a una stessa retta

DIM - Q iperparaboloide. Sia P_∞ il suo punto di tangenza con l'iperp. impropria π_∞, cioè P_∞ sia il centro di Q (in quanto polo di π_∞). Sia $Q_\infty \neq P_\infty$, $Q_\infty \in \pi_\infty$. L'iperp. polare di P_∞ è π_∞, che passa per Q_∞; ma allora, per reciprocità, l'iperp. diametrale polare di Q_∞ passa per P_∞.
Totale: tutti gli iperpiani diametrali contengono uno stesso punto improprio, quindi sono paralleli a una stessa retta.



D
B
C
A

Es.: $\Gamma: \; x^2 - 6xy + 4x - 2y + 5 = 0$

$$X_1^2 - 6X_1X_2 + \cancel{4X_1X_0} - \cancel{2X_2X_0} + \cancel{5X_0^2} = 0$$

$X_0 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & \boxed{\begin{matrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

M_∞

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -13 & -5 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -13 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{non deg.}$$

$|M_\infty| = -9 < 0$ iperbole

Trovo i suoi punti impropri:

$$\begin{cases} X_1(X_1 - 6X_2) = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \qquad P_{1\infty} = (0, 0, 1), \quad P_{2\infty} = (0, 6, 1)$$

$$\begin{matrix} (0 \; 0 \; 1) \\ (0 \; 6 \; 1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Polare di $P_{1\infty}$: $-1 - 3x = 0$

" " $P_{2\infty}$: $11 + 3x - 18y = 0$

asintoti

Es.: Trovare la tang. in $\bar{P} \equiv \left(0, \frac{5}{2}\right)$ a Γ di prima

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{P} \equiv \left(1, 0, \frac{5}{2}\right) \sim (2, 0, 5)$$

tang. a Γ in $\bar{P}$ = polare di $\bar{P}$ risp. a Γ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$5 - 11x - 2y = 0$$

DIM - Q iperquadrica di discriminante

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sia $P_\infty = (0, l_1, \dots, l_n)$ il generico punto improprio. Il suo iperpiano polare (iperpiano diametrale coniugato alla sua direzione) è:

$$(x_0\, x_1 \cdots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = 0$$

$1 \quad x_1 \cdots x_n$

$$\begin{pmatrix} a_{00} \cdot 0 + a_{01} l_1 + \dots + a_{0n} l_n \\ a_{10} \cdot 0 + a_{11} l_1 + \dots + a_{1n} l_n \\ \vdots \\ a_{n0} \cdot 0 + a_{n1} l_1 + \dots + a_{nn} l_n \end{pmatrix}$$

termine noto $=: \beta$

coeff. di $x_1 =: \alpha_1$

coeff. di $x_n =: \alpha_n$

L'iperpiano ha eq. $\beta + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

con
$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1\\ \cdots & M_{00} & \cdots\\ a_1^n & \cdots & a_n^n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$$

Condizione di ortogonalità retta-iperpiano:

$$(l_1, \dots, l_n) \sim (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$\exists \lambda \neq 0$ tale che
$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = M_{00} \cdot \begin{pmatrix} l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix} = \underset{\neq 0}{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$$

20/7/2010 es. 14

$$\Gamma_1 : \; -x^2 - 6xy + y^2 - 8x + 4y = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (-1-\lambda) & -3 \\ -3 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 - 9 = \lambda^2 - 10 = (\lambda + \sqrt{10})(\lambda - \sqrt{10})$$

scelgo $\lambda = \sqrt{10}$

$$U_{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} (-1-\sqrt{10}) & -3 \\ \cancel{-3} & \cancel{(1-\sqrt{10})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$(-1-\sqrt{10})\,l - 3m = 0$$

$$(l, m) \sim (-3, 1+\sqrt{10})$$

Il polo di uno degli assi è: $P_\infty \equiv (0, -3, 1+\sqrt{10})$

asse:
$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & (1+\sqrt{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$(14 + 2\sqrt{10}) + (-3\sqrt{10})x + (10 + \sqrt{10})y = 0$$

1/7/2009 es. 2b Trovare un piano principale di

$x^2+2y^2-z^2-2x+2z=0$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{00}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix}$$

Autovalori: $1, 2, -1$ Scelgo $\lambda=2$

$$V_2: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -l=0 \\ -3n=0 \end{cases} \qquad (l,m,n)\sim(0,1,0)$$

Polo di un piano principale: $P_\infty \equiv (0,0,1,0)$

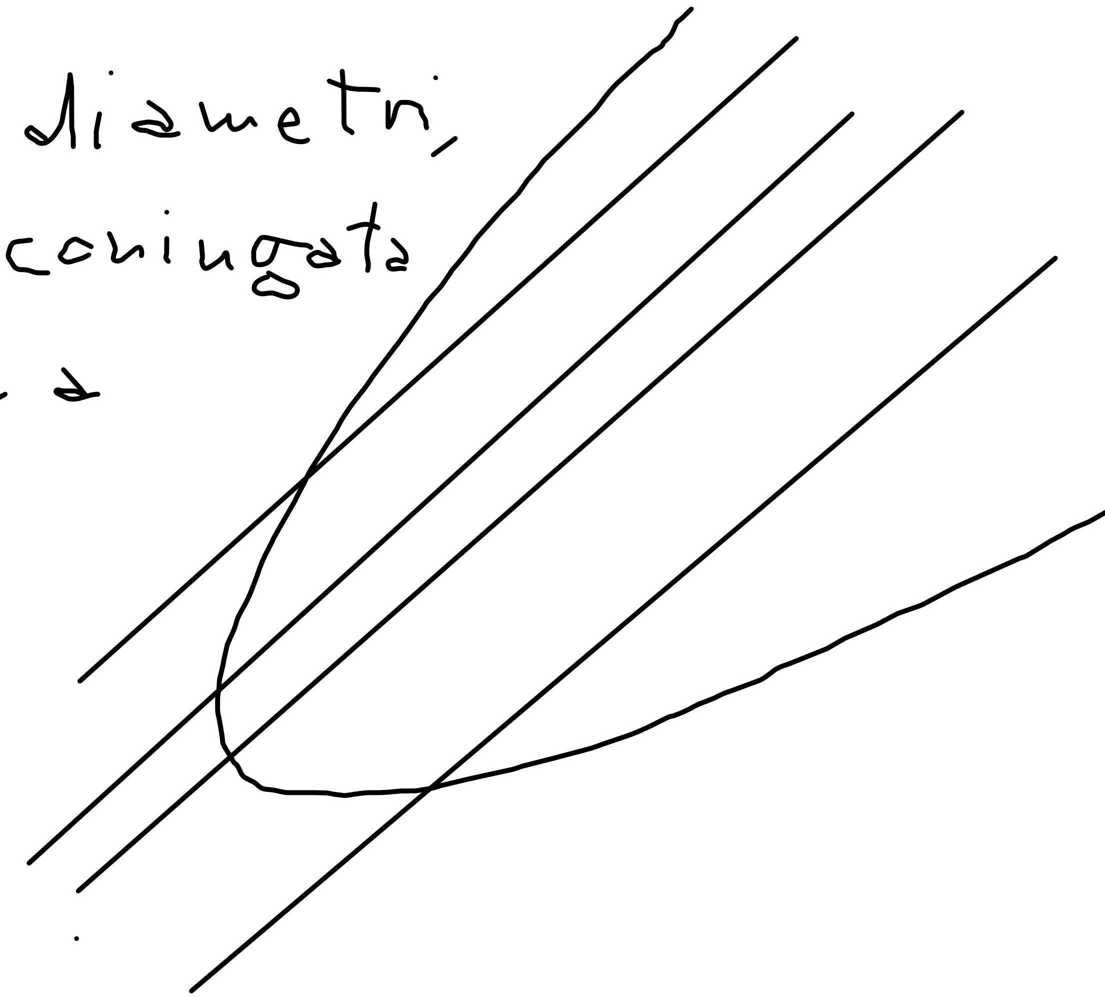
(Un) Piano principale: $(0\ 0\ 1\ 0)\,A\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \qquad 2y=0$

Scorciatoia per trovare l'asse di una parabola

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 8y + 1 = 0$$

Centro: $P_\infty = (0,3,1)$

$(l,m) \sim (3,1)$ è la direzione di tutti i diametri, quindi anche dell'asse; la direzione coniugata all'asse è dunque quella ortogonale a questa direzione comune: $(\bar{l}, \bar{m}) \sim (1,-3)$; il polo dell'asse è dunque $Q_\infty = (0,1,-3)$



asse: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$$12 + 10x - 30y = 0$$

Controllo con gli autovalori:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$M_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -3 \\ -3 & (9-\lambda) \end{vmatrix} = (\cancel{9} - \lambda - 9\lambda + \lambda^2 - \cancel{9}) = \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10)$$

$$U_{10}: \begin{pmatrix} \cancel{-9} & \cancel{-3} \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -3l - m = 0 \qquad (l, m) \sim (1, -3)$$

Polo dell'asse: $Q_\infty \equiv (0, 1, -3)$

Non posso usare l'autoval. 0; cosa succede se lo faccio?

$$V_0: \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ \cancel{-3} & \cancel{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \end{pmatrix} \qquad l - 3m = 0 \qquad (l, m) \sim (3, 1)$$

polo: $(0, 3, 1)$

$$(0\ 3\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ y \end{matrix} = 0 \qquad -4x_0 + \cancel{0x_1} + \cancel{0x_2} = 0$$

$$-4 = 0$$