$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ f(\bar{u}) & \varphi(\bar{u}) & 1 \\ f'(\bar{u}) & \varphi'(\bar{u}) & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{c} \\ x_0 \nearrow \\ y_0 \nearrow \end{array} \begin{vmatrix} (x-x_0) & (y-y_0) & \cancel{0} \\ \cancel{f(\bar{u})} & \cancel{\varphi(\bar{u})} & \cancel{1} \\ f'(\bar{u}) & \varphi'(\bar{u}) & \cancel{0} \end{vmatrix} = 0$$

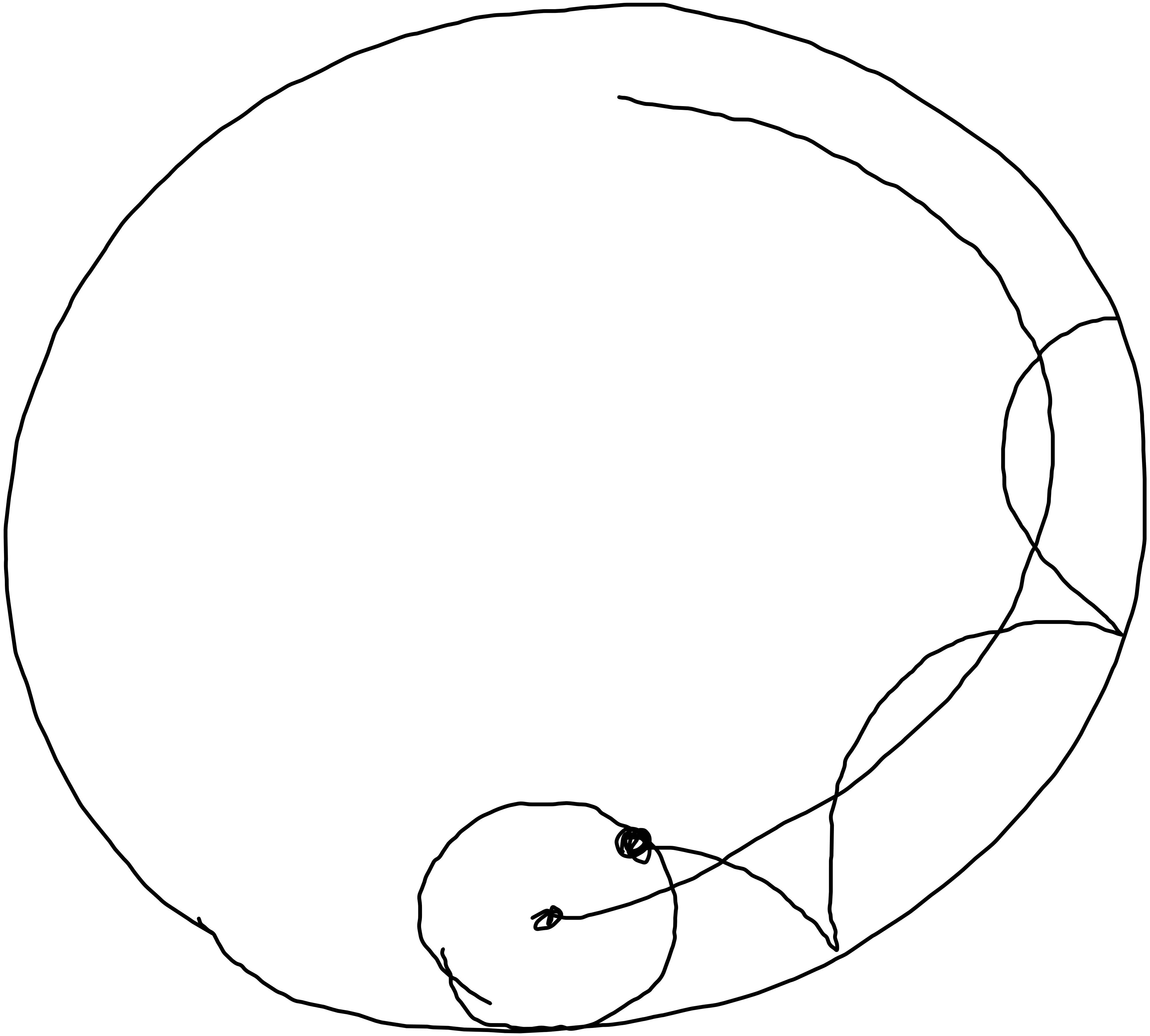
$$-\Big((x-x_0)\,\varphi'(\bar{u}) - (y-y_0)\,f'(\bar{u})\Big) = 0 \qquad \boxed{\frac{x-x_0}{f'(\bar{u})} = \frac{y-y_0}{\varphi'(\bar{u})}} = v$$

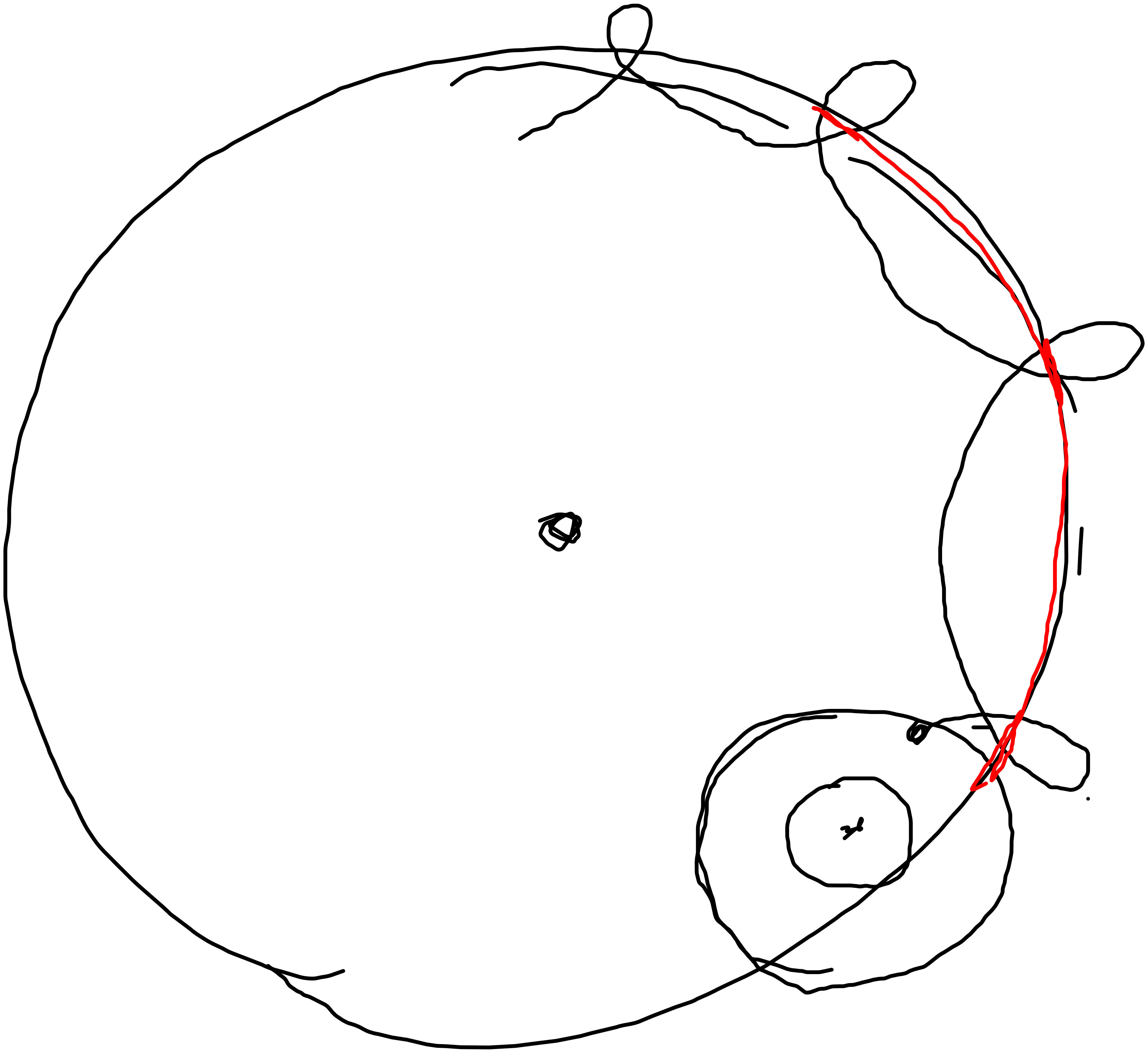
tang.

$$\begin{cases} x = v\,f'(\bar{u}) + x_0 \\ y = v\,\varphi'(\bar{u}) + y_0 \end{cases}$$

normale:

$$f'(\bar{u})(x-x_0) + \varphi'(\bar{u})(y-y_0) = 0$$





Es. 4a $\mathcal{C}: y = x^2$ $\mathcal{C}': y = -x^3$ Trovare il luogo $\mathcal{L}$ dei punti d'intersezione delle tangenti condotte a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ in punti di uguale ascissa.

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha^2 \end{cases} \qquad \mathcal{C}': \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha^3 \end{cases}$$

P_α $\qquad$ Q_α

$$\mathcal{L}: \begin{cases} 2\alpha^3 - 3x\alpha^2 - y = 0 \\ \alpha^2 - 2x\alpha + y = 0 \end{cases}$$

tang. a $\mathcal{C}$ in P_α :

$$t_\alpha : y - \alpha^2 = \underbrace{2\alpha(x-\alpha)}_{2\alpha x - 2\alpha^2}$$

$$\alpha^2 - 2x\alpha + y = 0$$

tang. a $\mathcal{C}'$ in Q_α

$$t'_\alpha : y + \alpha^3 = \underbrace{-3\alpha^2(x-\alpha)}_{-3\alpha^2 x + 3\alpha^3}$$

$$2\alpha^3 - 3x\alpha^2 - y = 0$$

$$Q:\begin{cases}2\alpha^3-3x\alpha^2-y=0\\ \alpha^2-2x\alpha+y=0\end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} 2\alpha^3-3x\alpha^2-y & \alpha^2-2x\alpha+y \\ \hline -2\alpha^3+4x\alpha^2-2y\alpha & 2\alpha+x \end{array}$$

$$// \quad x\alpha^2-2y\alpha-y \longrightarrow \frac{(y+xy)\left(-4x^3\overset{+5}{\cancel{-3}}xy+y\right)+y\,4(x^2-y)^2}{4(x^2-y)^2}$$

$$-x\alpha^2+2x^2\alpha-xy$$

$$// \quad 2(x^2-y)\alpha-y-xy$$

$$\begin{array}{l|l} \alpha^2-2x\alpha+y & 2(x^2-y)\alpha-y-xy \\ \hline -\alpha^2+\dfrac{\alpha(y+xy)}{2(x^2-y)} & \left(\dfrac{\alpha}{2(x^2-y)}+\dfrac{(-4x^3-3xy+y)}{4(x^2-y)^2}\right) \end{array}$$

$$// \quad \frac{-4x\alpha(x^2-y)+\alpha(y+xy)}{2(x^2-y)}+y=\frac{\left(-4x^3\overset{+5}{\cancel{-3}}xy+y\right)\alpha}{2(x^2-y)}+y$$

$$=\quad -\frac{(\quad)}{2(\quad)}+\frac{(y+xy)\left(-4x^3\overset{+5}{\cancel{-3}}xy+y\right)}{4(x^2-y)^2}$$

$$\frac{4y^3 - 3x^2y^2 + 6xy^2 + y^2 - 4x^3y}{4\left(x^2 - y\right)^2} = 0$$

$$y\left(4y^2 - 3x^2y + 6xy + y - 4x^3\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3x & 0 & -y & 0 \\ 0 & 2 & -3x & 0 & -y \\ 1 & -2x & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2x & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2x & y \end{vmatrix} = 0$$

$$\searrow = 4y^3 - 3x^2y^2 + 6xy^2 + y^2 - 4x^3y$$

cubica gobba

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = u \\ y = u^2 \\ z = u^3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$$

in questa intersezione È CONTENUTA $\mathcal{C}$, ma anche una parte extra

Metodo 1 per scoprire se una data curva in forma parametrica è piana o sghemba.

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = f(u) \\ y = g(u) \\ z = \varphi(u) \end{cases}$$

Il piano generico

$$ax + by + cz + d = 0$$

Interseco e impongo che l'intersezione sia tutta $\mathcal{C}$; se esistono a, b, c, d (con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) per cui succeda, la curva è piana e ho trovato il piano che la contiene. Altrimenti $\mathcal{C}$ è sghemba.

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = u \\ y = u^2 \\ z = u^3 \end{cases}$$ è piana? $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$

$F(x, y, z) =$

$$\Phi(u) = F(f(u), q(u), \psi(u))$$

$$\Phi(u) = au + bu^2 + cu^3 + d \qquad \Phi(u) = 0$$

Provo a imporre che sia una identità, cioè $\forall u \in \mathbb{R}$ $\Phi(u) = 0$

Φ è un polinomio in u, è identicamente nullo $\iff$ i coefficienti delle potenze u^3, u^2, u, u^0 sono nulli,

$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ d = 0 \end{cases} \longrightarrow$$ nessun piano. $\mathcal{C}$ è sghemba

Es 5 b

$$C : \begin{cases} x = u^3 - 6u^2 \\ y = 3u \\ z = u - 1 \end{cases}$$

dire se è piana

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \qquad \Phi(u) = a(u^3 - 6u^2) + b\,3u + c(u-1) + d$$

$f(x,y,z) =$

$$au^3 - 6au^2 + (3b + c)u - c + d = 0$$

Identità $\iff$ $\begin{cases} a = 0 \\ -6a = 0 \\ 3b + c = 0 \\ -c + d = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = k \\ c = -3k \\ d = -3k \end{cases}$

Scelgo $k = 1$

$$y - 3z - 3 = 0$$

Piano normale:

$$f'(\bar{u})(x - f(\bar{u})) + \varphi'(\bar{u})(y - \varphi(\bar{u})) + \psi'(\bar{u})(z - \psi(\bar{u})) = 0$$

Normale alla spf in $\bar{P}$:

$$\frac{x - \bar{x}}{f'_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \frac{y - \bar{y}}{f'_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \frac{z - \bar{z}}{f'_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Es. 13 $\mathcal{C}$: $y = x^2$ Scrivere l'eq. cart. della podaria di $\mathcal{C}$ da $A = (3,0)$, cioè il luogo delle intersezioni delle tangenti a $\mathcal{C}$ con le loro perpendicolari condotte da A.

$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha^2 \end{cases}$ $t_\alpha : y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha)$ $\alpha^2 - 2x\alpha + y = 0$

$2\alpha x - 2\alpha^2$

tang. in P_α

$P_\alpha = (\alpha, \alpha^2)$

perp. a t_α da A n_α: $\frac{x-3}{-2\alpha} = \frac{y-0}{1}$ $x - 3 = -2\alpha y$

$2y\alpha + x - 3$

$$\mathcal{L}: \begin{cases} \alpha^2 - 2x\alpha + y = 0 \\ 2y\alpha + x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha^2 - 2x\alpha + y \quad \Big| \; \underline{2y\alpha + x - 3}$$

$$\frac{-4xy + 2\alpha y - x + 3}{4y^2}$$

$$\text{resto: } \frac{4y^3 + 4x^2y - 12xy + x^2 - 6x + 9}{4y^2}$$

$$\mathcal{G}: \boxed{4y^3 + 4x^2y - 12xy + x^2 - 6x + 9} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2x & y \\ 2y & (x-3) & 0 \\ 0 & 2y & (x-3) \end{vmatrix} = 0$$

$$=$$