Es. 10 b $\quad C : \begin{cases} z = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \qquad V \equiv (0,0,1)$

Cono Σ con direttice C e vertice V.

$P_\alpha \equiv (\alpha, \alpha^2, 0) \qquad VP_\alpha : \dfrac{x-0}{\alpha-0} = \dfrac{y-0}{\alpha^2-0} = \dfrac{z-1}{0-1} = \beta$

$$\begin{cases} x = \alpha\beta \\ y = \alpha^2\beta \\ z = 1-\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha\beta \\ y = \alpha^2\beta \\ \beta = 1-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha(1-z) \\ y = \alpha^2(1-z) \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{1-z} \\ y = \alpha^2(1-z) \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{(1-z)^{\cancel{2}}}\cancel{(1-z)}$$

$$\boxed{x^2 - y(1-z) = 0}$$

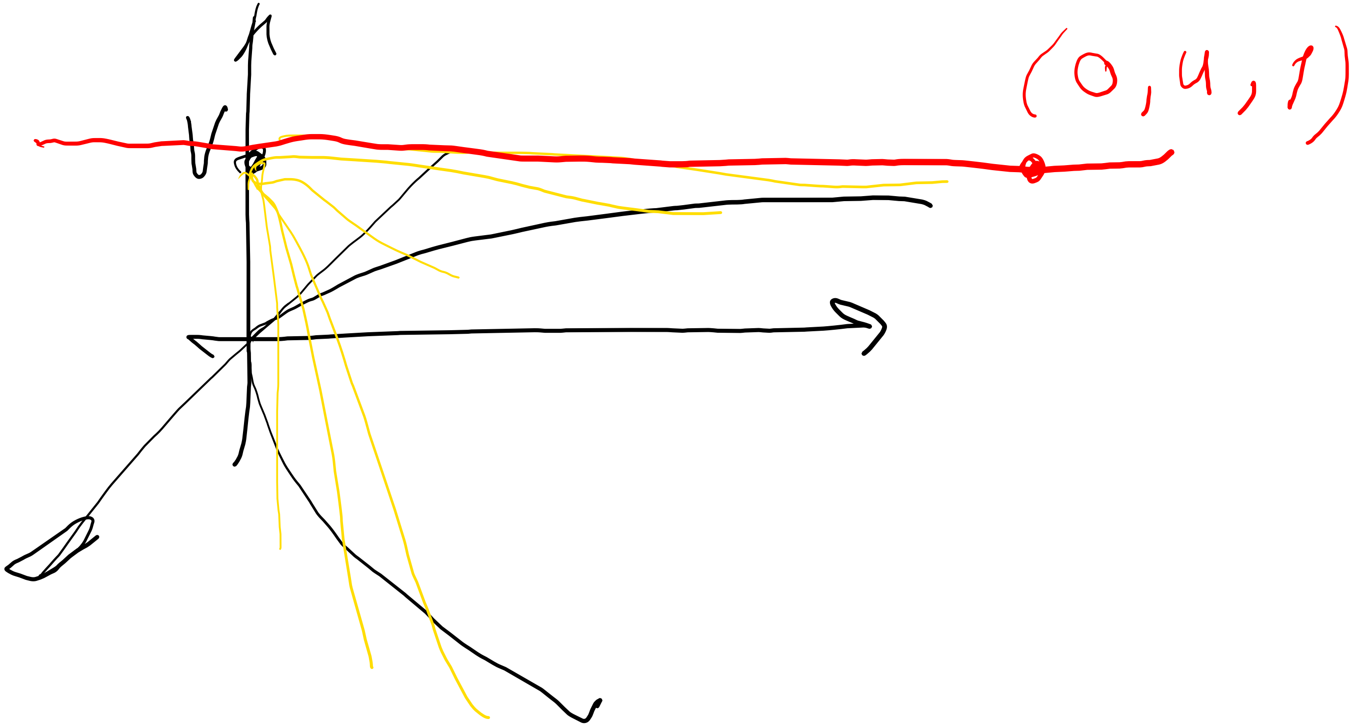
$$\begin{vmatrix} (1-z) & 0 & -y \\ (1-z) & -x & 0 \\ 0 & (1-z) & -x \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-z)(x^2 - y(1-z)) = 0$$

$\alpha^2(1-z) - y \;\Big|\; \alpha(1-z) - x$

$x^2 - y(1-z) = 0$

reste : $\dfrac{x^2 - y(1-z)}{1-z}$



Es. 10 c $\quad C: \begin{cases} z = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \quad r: \begin{cases} x = 2y \\ z = y - 1 \end{cases} \quad (\ell, m, n) \sim (2, 1, 1)$

Cilindro S con direttrice C e generatrici $\parallel r$.

$P_\alpha \equiv (\alpha, \alpha^2, 0) \quad P_\alpha \; R_\alpha : \dfrac{x - \alpha}{2} = \dfrac{y - \alpha^2}{1} = \dfrac{z - 0}{1} = \beta$

$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = \alpha^2 + \beta \\ z = \beta \end{cases} \quad \begin{cases} x = \alpha + 2z \\ y = \alpha^2 + z \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = x - 2z \\ y = \alpha^2 + z \end{cases}$

$$\boxed{y = (x - 2z)^2 + z}$$

Parabola con vertice $O \equiv (0,0)$ e fuoco $F \equiv (0, f)$

$C: y = \frac{x^2}{4f}$ Circonferenza osculatrice in O. $\Leftrightarrow u=0$

$C: \begin{cases} x = u \\ y = u^2/4f \end{cases}$

Generica circonferenza: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$G(x, y)$

$\Phi(u) = G(u, u^2/4f) = u^2 + \frac{u^4}{16 f^2} + au + \frac{b u^2}{4f} + c$

$\Phi'(u) = \frac{u^3}{4f^2} + \frac{bu}{2f} + 2u + a$

$\Phi''(u) = \frac{3u^2}{4f^2} + \frac{b}{2f} + 2$

$\Phi'''(u) = \frac{3u}{2f^2}$ $\quad \Phi^{IV}(u) = \frac{3}{2f^2}$ $\quad \Phi'''(0) = 0$ $\quad \Phi^{IV}(0) \neq 0$

$\begin{cases} \Phi(0) = 0 \\ \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ \frac{b}{2f} = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0 \\ b = -4f \\ c = 0 \end{cases}$

$x^2 + y^2 - 4fy = 0$ $\quad C \equiv (0, 2f)$

contatto di ordine 3

Es 9 $\quad \mathcal{C}: y = 1/x \qquad \begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{1}{u} \end{cases}$

Circ. oscul. a $\mathcal{C}$ in $A \equiv (2, 1/2)$, $B \equiv (1, 1)$

$u = 2 \qquad\qquad u = 1$

Ordine di contatto?

Generica circ: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$\Phi(u) = u^2 + au + \frac{b}{u} + \frac{1}{u^2} + c$$

$$\Phi'(u) = 2u - \frac{b}{u^2} - \frac{2}{u^3} + a$$

$$\Phi''(u) = \frac{2b}{u^3} + \frac{6}{u^4} + 2$$

$$\Phi'''(u) = -\frac{6b}{u^4} - \frac{24}{u^5}$$

$$\begin{cases} \Phi(2) = 0 \\ \Phi'(2) = 0 \\ \Phi''(2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{49}{8} \\ b = -\dfrac{19}{2} \\ c = \dfrac{51}{4} \end{cases} \text{ in } A$$

$$\Phi^{IV}(u) = \frac{24b}{u^5} + \frac{120}{u^6}$$

$$\Phi^{V}(u) = -\frac{120b}{u^6} - \frac{720}{u^7}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{49}{8}x - \frac{19}{2}y + \frac{51}{4} = 0$$

$$\Phi'''(2) = \frac{45}{16} \neq 0$$

ordine 2

in B

$$\begin{cases} \Phi(1) = 0 \\ \Phi'(1) = 0 \\ \Phi''(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -4 \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases} \qquad x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$$

$\Phi'''(1) = 0$ $\qquad \Phi^{IV}(1) = 24 \neq 0$ $\qquad$ ordine di contatto 3

$$\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ \left((x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) + \ldots\ldots \end{cases}$$

$$f(x,y) = \cancel{f(x_0,y_0)} +$$

"falsa potenza": scrivo

$$\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) \text{ per}$$

$$\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) \text{ per } (x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

eccetera

$$\begin{cases} y-y_0 = k(x-x_0) \\ (x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\Big) f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \dots \end{cases}$$

$$\dots + \frac{1}{(s-1)!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s-1} f(x_0,y_0) + \frac{1}{s!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s} f(x_0,y_0) + \dots$$

$$\begin{cases} (y-y_0) = k(x-x_0) \\ (x-x_0)\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \dots \end{cases}$$

$$\dots + \frac{1}{(s-1)!}(x-x_0)^{s-1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s-1} f(x_0,y_0) + \frac{1}{s!}(x-x_0)^{s}\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s} f(x_0,y_0) + \dots$$

x_0 è radice almeno s-esima per ogni k se si annullano tutti i termini fin qui

questo succede $\iff$ sono nulle tutte le derivate parziali di f calcolate in (x_0, y_0) fino a tutte quelle di ordine $s-1$.

Se anche solo una derivata parziale di ordine s non si annulla, la generica retta per (x_0, y_0) ha esattamente s punti d'intersezione raccolti lì.

Come trovo una tangente nel punto $\hat{G}$?

Corrisponde a un certo k per cui si annulla anche

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^s f(x_0, y_0) \qquad \left(\beta\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^s f(x_0, y_0)$$

$$k = +\frac{\alpha}{\beta} \qquad \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) = 0$$