Gruppo, anello, campo.
Determinante

Matrice inversa
di una matrice
quadrata A

$$AB = BA = I$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = -1 \neq 0$$

$$\exists A^{-1}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vuoi calcolare A^{-1}?
Calcola prima di tutti la matrice dei complementi algebrici $A^{\#} = (A_{ij})$

A_{ij} si chiama "complemento algebrico dell'elemento a_{ij} di A" ed è definito così:

$$A_{ij} := \det M_{ij} \cdot (-1)^{i+j}$$

dove M_{ij} è la sottomatrice di A ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det M_{12} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^{t}(A^{\#})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{11} = 4$$

$$1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31}$$

$$= 1 \cdot A_{11} = 4 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Applicare trasf. riga finché a sinistra non compare la matrice identica. Allora avrete a destra A^{-1}.

Lineare dipendenza di vettori in uno spazio vettoriale.

$$\{(1,2,-1),(1,1,1),(2,3,0)\}$$

è lin. dipendente

$$\boxed{(2,3,0)=(1,2,-1)+(1,1,1)}$$

$v_1, \ldots, v_k \quad a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$

$$1\cdot(2,3,0)-1\,(1,2,-1)-1\,(1,1,1)=0$$

Sistema di generatori per uno s.v. V.

$\{v_1, \dots, v_k\}$ è un s. di gen. per V se ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

Una base è un sistema di generatori lin. indipendente.

Ogni s.v. ammette
almeno una base.

Due basi hanno
la stessa
cardinalità.
Questa cardinalità
viene detta dimensione
di V (dim V).

Sia $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base.

$$v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$$

I numeri x_i vengono detti coord. di v rispetto a B.

$$v \underset{B}{\equiv} (x_1, \ldots, x_n)$$

$\mathbb{R}^2$ $\quad B = ((1,1),(1,2))$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

Quali sono le coord. di $(2,3)$ risp. a B?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1+2x_2\end{pmatrix}}_{2\times 1}\Longleftrightarrow\begin{cases}\underline{x_1+x_2=2}\\\underline{x_1+2x_2=3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2=1\end{cases}\qquad (2,3)\underset{B}{\equiv}(1,1)$$

Rango di una matrice A $m \times n$: dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe (colonne) di A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + 3y + 2t = 1 \end{cases}$$

Ci sono soluzioni?

Quali sono?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = (A|B) = C$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \hline 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -3r - s - 1 \\ y = 2r + 1 \\ z = r \\ t = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3z + t = -1 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3r - s - 1 \\ 2r + 1 \\ r \\ s \end{pmatrix}$$

Le variabili corrispondenti ai pivot vengono prese come incognite e le altre come parametri.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3r - s - 1 \\ 2r + 1 \\ r \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da tutto ciò si deduce che dim Sol S è $n - r(C)$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_4 + x_5 = 4 \\ x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare rank A applicare trasf riga fino a che la matrice non è ridotta (a gradini)

$$\begin{pmatrix} x & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & x & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Forma completamente ridotta di una matrice A

= forma a gradini

tale che

1) i pivot sono tutti 1

2) sopra ogni pivot ci sono solo zeri

Equivalentemente i vettori $v_1, \dots, v_k$ si dicono lin. dip. se esiste $(a_1, \dots, a_k) \neq (0, \dots, 0)$ t.c. $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \mathbf{0}$

Tutto questo ci dice che

$Sol\,S \neq \emptyset \iff r(A) = r(C)$

Teor. di Rouché-Capelli.

Teor. di Kronecker

$$\begin{cases} x + y + tz = 1 \\ x + 2ty = 0 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 2t & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & 2t-1 & -t & -1 \\ 0 & -2 & -1-t & 2 \end{array}\right)$$

Se in A esiste
un minore $k \times k$ M t.c.
1) $\det M \neq 0$
2) Tutti gli "orlati di M"
hanno det nullo.
Allora $r(A) = k$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

orlato

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 1 \\ 0 & 2t-1 & -t & -1 \\ 0 & -2 & -1-t & 2 \end{array}\right) \quad (A|B) = C$$

$$r(C) = ?$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 2t-1 & -t \\ 0 & -2 & -1-t \end{pmatrix} = (1+t)(1-2t) - 2t$$

$$= -2t^2 - t + 1 - 2t = -2t^2 - 3t + 1$$

$$-2t^2-3t+1=0$$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{-4}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{-4}$$

Set $t \neq -\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

$r(C)=3$

$r(A)=3$

$\dim \mathrm{Sol}\, S = 0$

Trasformazioni lineari

$$f: V \longrightarrow W$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ v_1, v_2 \in V$$

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$$

$$\begin{cases} f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2) \\ f(cv)=c\,f(v) \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ è una

trasf. lineare?

$$\underline{f(x) = x + 5}$$

$$f(1+2) = f(1) + f(2)$$

$$\begin{array}{ccc} \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ 8 & 6 & 7 \end{array}$$

$$f(x) = 2x$$

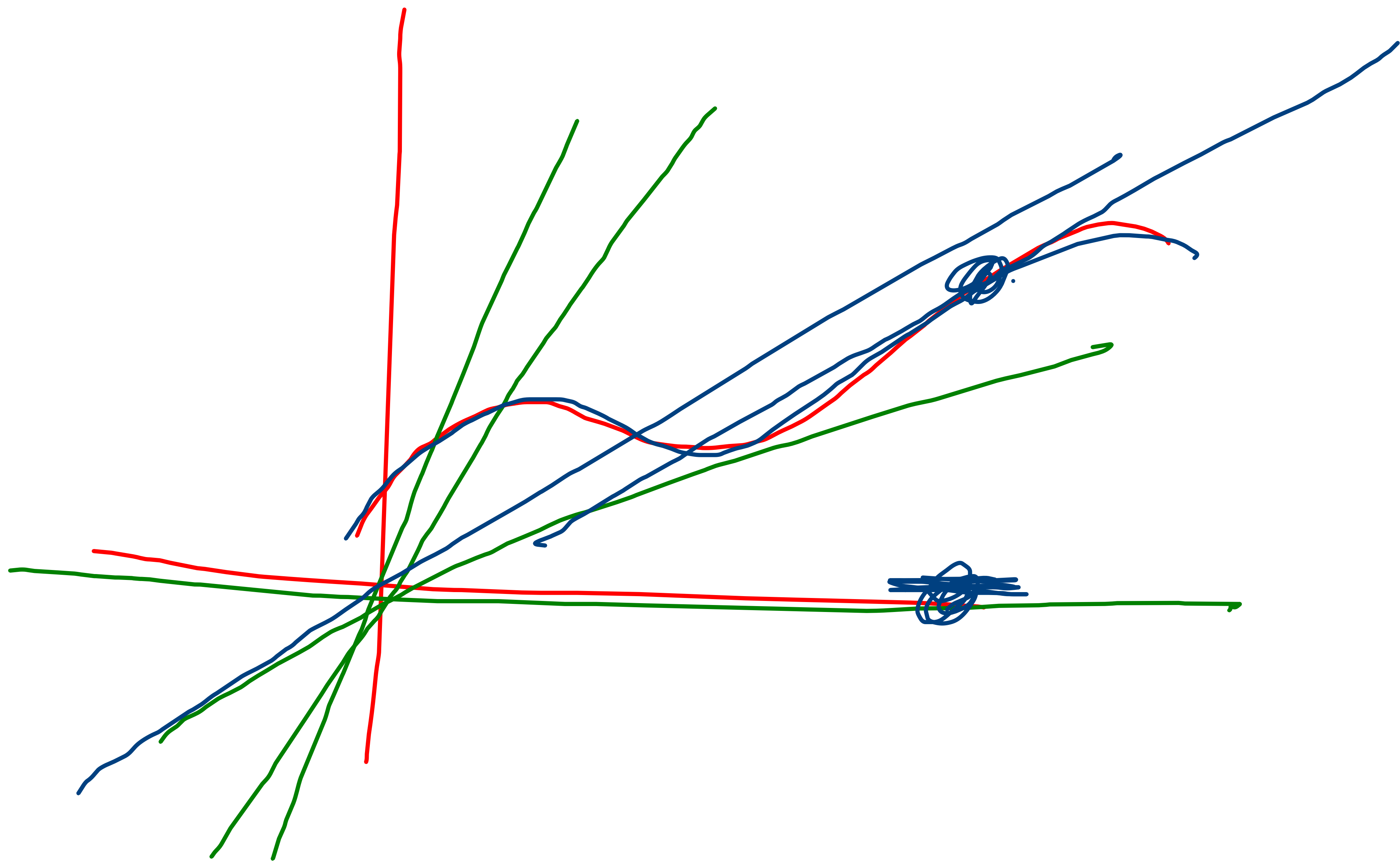
$$f(x+y) = 2(x+y)$$

$$f(x) + f(y) = 2x + 2y$$

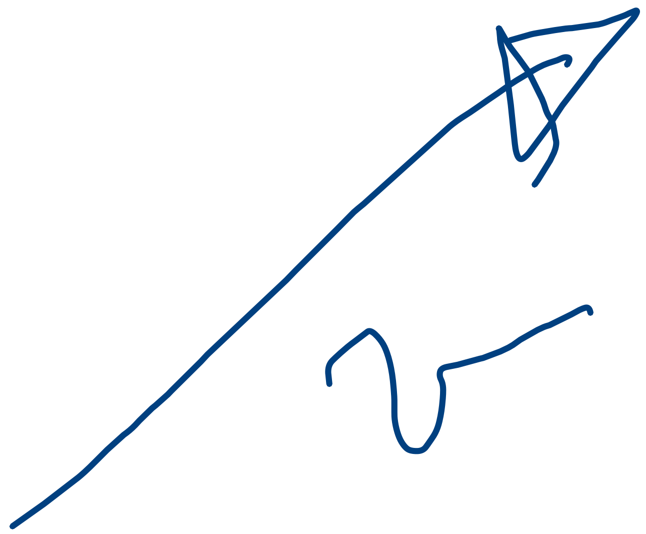
$$f(x) = cx$$

(x, y, z) $\qquad f(x) = cx$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



V



$(x_1, \ldots, x_n)$

$f(v)$

$f: V \to W$

A

$$v \longmapsto f(v)$$

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$f : V \longrightarrow W$$

$$\begin{matrix} B_V & & B_W \\ \parallel & & \parallel \\ (v_1, \dots, v_n) & & (w_1, \dots, w_m) \end{matrix}$$

$$A = \begin{array}{c} n \\ \left(\begin{array}{c} ? \end{array} \right) \end{array} \Big\} m$$

$$A = \begin{pmatrix} f(v_1) & \cdots & f(v_n) \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$f(v_1) = (1,1,0)$

$f(v_2) = (1,0,1)$

$B_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$B_2 = ((1,0),(0,1))$

$w_1 \quad w_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (x+y,\ x+z,\ y-z)$$

$f(v_3) = (0,1,-1)$

$$v \longmapsto f(v)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

matrice associata a f rispetto alle basi scelte.