$\bar{P} \equiv (\bar{X})$, $\bar{Q} \equiv (\bar{Y})$ $\qquad Q = \mathrm{Im}[f]$ $\qquad A$ discr.

$r: (Z) = \lambda(\bar{X}) + \mu(\bar{Y})$

$r \cap Q:$ $\lambda^2\, {}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{X}) + 2\lambda\mu\, {}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) + \mu^2\, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) = 0$

Sia $\bar{P} \in Q - W[f]$, allora ${}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{X}) = 0$

mi resta $\mu\left(2\lambda\, {}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) + \mu\, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Y})\right) = 0$

$\neq 0$

μ in evidenza mi dice una cosa che so già: $\bar{P} \in Q$

L'altro punto di intersez. è dato da

Pongo $k = \frac{\mu}{\lambda}$, da cui ottengo $2\, {}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) + k\, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) = 0$

$$k = -\frac{2\, {}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y})}{{}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Y})}$$

Cerco i punti $\bar{Q}$ perchè la retta r è tangente di tipo 1 (intersezione costituita dal solo punto $\bar{P}$). $\bar{P}$ deve essere dato come intersezione anche da quest'ultima eq. precisamente dev'essere $k=0$ la soluzione in k,

$$0 = k = -2\,\frac{t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{Y})}{\underbrace{t(\bar{Y})\cdot A\cdot(\bar{Y})}_{\neq 0}} \iff t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{Y}) = 0$$

$\neq 0$, sto supponendo che $\bar{Q} \notin \mathcal{Q}$

Per quali punti $\bar{Q}$ la retta r è tangente di tipo 2 ($r \subseteq \mathcal{Q}$)?

$$r \subseteq \mathcal{Q} \iff \underbrace{\lambda^2\, t(\bar{X})A(\bar{X})}_{\bar{P}\in\mathcal{Q}\ \ 0=} + 2\lambda\mu\, t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{Y}) + \mu^2\, \underbrace{t(\bar{Y})\cdot A\cdot(\bar{Y})}_{\Rightarrow 0\ \ \bar{Q}\in\mathcal{Q}} = 0$$

è un'identità, cioè vale $\forall\,(\lambda,\mu)$

$\iff$ tutti i coefficienti sono nulli

$$\Longrightarrow -2\; t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{Y}) = 0$$

Perciò in entrambi i casi ho

$$t(\overline{X}) \cdot A \cdot (\overline{Y}) = 0$$

cioè $\overline{Q} \in \tau(\overline{P})$.

TEOR- Sia $[f]$ un'iperquadrica non specializzata di $\mathbb{P}^n$. Sia Π un iperpiano di $\mathbb{P}^n$. $[f'] = [f] \cap \Pi$ è un'iperquadrica di Π. $[f']$ è specializzata $\iff$ Π è tangente a $[f]$. In tal caso, detto $\overline{P}$ il punto di tangenza, $\mathrm{Im}[f']$ è costituita da

o il solo punto $\overline{P}$

o un'unione di rette contenenti $\overline{P}$

Sia $\overline{P} \in \mathcal{Q}$, sia $\Pi = \tau(\overline{P})$.

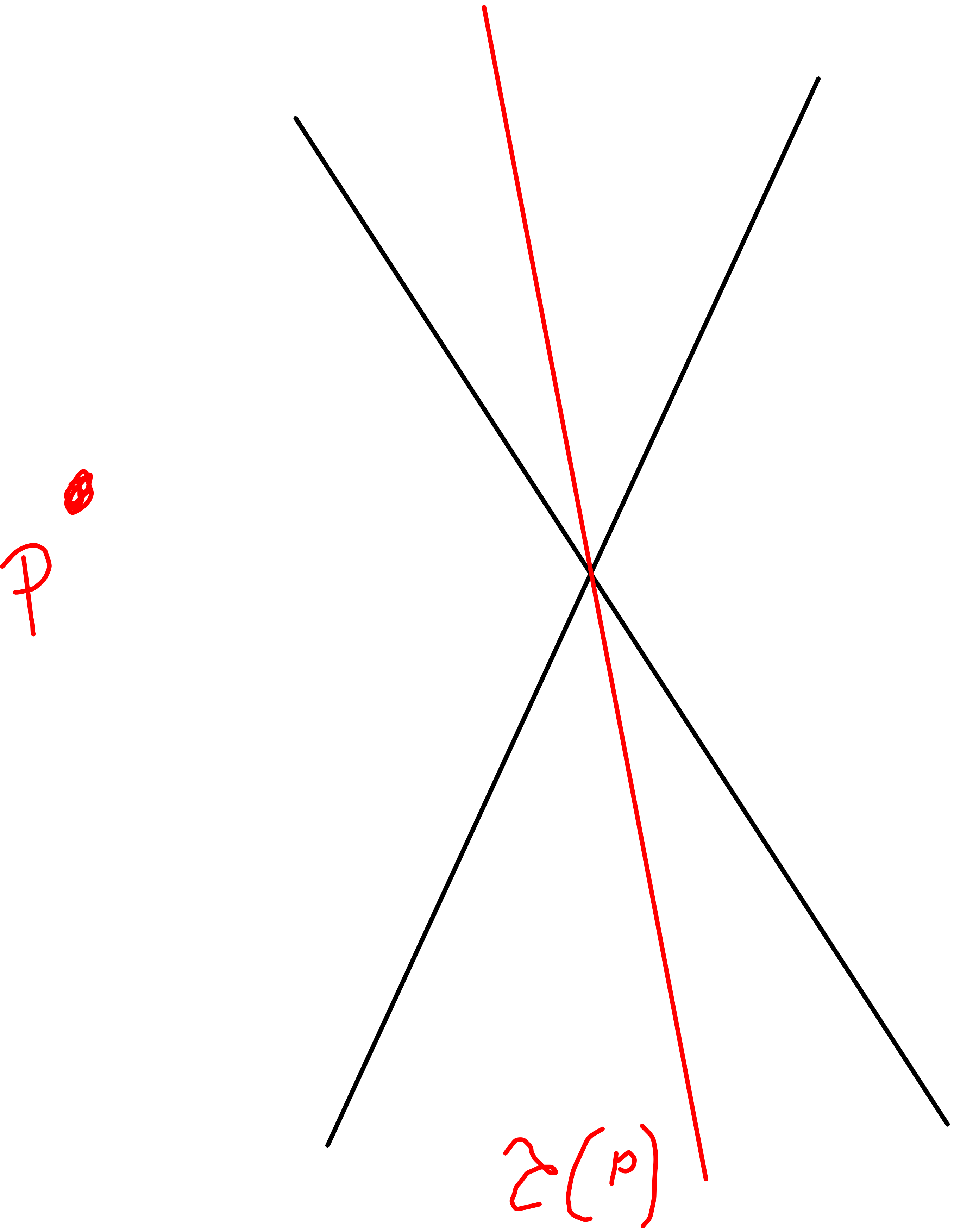
Caso a: $\mathcal{Q} \cap \Pi = \{\overline{P}\}$ OK, fine.

Caso b: $\mathcal{Q} \cap \Pi \supsetneq \{\overline{P}\}$ Sia $\overline{Q} \in \mathcal{Q} \cap \Pi$, $\overline{Q} \neq \overline{P}$

Cerco tutte le coppie (λ, μ) corrispondenti a punti di $\mathcal{Q} \cap \Pi$:

$$\lambda^2 \underbrace{{}^t(\overline{X}) A \cdot (\overline{X})}_{\substack{\| \\ 0 \\ \overline{P} \in \mathcal{Q}}} + 2\lambda\mu \underbrace{{}^t(\overline{X}) A \cdot (\overline{Y})}_{\substack{\| \\ 0 \\ \overline{Q} \in \tau(\overline{P})}} + \mu^2 \underbrace{{}^t(\overline{Y}) A \cdot (\overline{Y})}_{= 0 \ \overline{Q} \in \mathcal{Q}} = 0$$

Ma allora questa è un'identità, perciò OGNI punto della retta $\overline{P}\overline{Q}$ appartiene a $\mathcal{Q}$.


p
Z(p)

$\Gamma: \; x^2 - 4xy + 9y^2 - 2y + 1 = 0$

$X_1^2 - 4X_1X_2 + 9X_2^2 - 2X_2X_0 + X_0^2 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 8-4 \neq 0$ non deg.

Trovare la polare di $P \equiv (2,-1)$

$(1,2,-1)$

$\pi(P): (1\;2\;-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,X_0 \\ x\,X_1 \\ y\,X_2 \end{pmatrix} = 0$

$(2\;4\;-14) \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad 2X_0 + 4X_1 - 14X_2 = 0$

$2 + 4x - 14y = 0$

$1 + 2x - 7y = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Trovare il polo della retta $r: \ x - y - 3 = 0$

Interseco le polari di due punti di r:

Per esempio posso prendere $R \equiv (3, 0)$, $S \equiv (0, -3)$

$$r(R): \ (1 \ 3 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$r(S): \ (1 \ 0 \ -3) \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

polo
$$\begin{cases} 1 + 3x - 7y = 0 \\ 4 + 6x - 27y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ 6x - 27y = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ -13y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-1 + \frac{14}{13}}{3} \\ y = \dfrac{2}{13} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \qquad P \equiv \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

Cerca la polare di P:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{1}\,x_0 \\ \cancel{x}\,x_1 \\ \cancel{y}\,x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{1}\,x_0 \\ \cancel{x}\,x_1 \\ \cancel{y}\,x_2 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \cdot \cancel{1}\,x_0 + 0\,\cancel{x}\,x_1 + 0\,\cancel{y}\,x_2 = 0$$

$$\frac{4}{5}\,x_0 = 0$$

$Q: x^2+2y^2-4yz-z^2-4x+1=0$ $\quad A=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&-2&-1\end{pmatrix}$

Trovare il polo del piano $\pi: x-y+2z-2=0$

Prendo 3 punti su π: $R=(2,0,0)$, $S=(0,-2,0)$, $T=(0,0,1)$

$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\neq 0 \Rightarrow$ rango $=3$

R,S,T indip.

Trovo i piani polari:

$$(1\ 2\ 0\ 0)$$
$$(1\ 0\ -2\ 0)\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_0\\X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=0$$
$$(1\ 0\ 0\ 1)$$

$$\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\1&-2&-4&4\\1&-2&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-3X_0+0X_1+0X_2+0X_3=0\\ 1X_0-2X_1-4X_2+4X_3=0\\ 1X_0-2X_1-2X_2-1X_3=0\end{cases}$$

$$(X_0,X_1,X_2,X_3)\sim\left(\begin{vmatrix}0&0&0\\-2&-4&4\\-2&-2&-1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-3&0&0\\1&-4&4\\1&-2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&0&0\\1&-2&4\\1&-2&-1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-3&0&0\\1&-2&-4\\1&-2&-2\end{vmatrix}\right)=$$

$$=(0,36,-30,-12)\sim(0,6,-5,-2)$$

DEF - $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ A è simile ad A' $\Leftrightarrow \exists E \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c.
$|E| \neq 0$

$$A' = E^{-1} \cdot A \cdot E$$

DEF - $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$, simmetriche,
A è congruente ad A' $\Leftrightarrow \exists E \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$A' = {}^tE \cdot A \cdot E$$

V sp. vett. di dim $= n$ $\quad \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi ordinate di V

$v, w \in V$ $\quad v \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x)$ $\quad w \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y)$

$v \equiv_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (x')$ $\quad w \equiv_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = (y')$

Esiste una matrice $F \in GL_n$ tale che

$$(x') = F \cdot (x) \quad , \quad (y') = F \cdot (y)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad - - - -$$

Una forma lineare φ su V si scrive

risp. a $\mathcal{B}$ $\quad c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

risp. a $\mathcal{B}'$ $\quad c'_1 x'_1 + \cdots + c'_n x'_n = (x'_1 \cdots x'_n) \cdot \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = {}^t(x') \cdot (c')$

Problema: trovare i (c') dati i (c)

$$(x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = {}^t(x) \cdot (c) =$$

$$= {}^t\left(F^{-1} \cdot (x')\right) \cdot (c) = {}^t(x') \cdot \left({}^t(F^{-1})\right) \cdot (c)$$

$$= {}^t(x') \cdot (c')$$

$(x') = F(x)$

$(x) = F^{-1} \cdot (x')$

$$\Rightarrow (c') = {}^t(F^{-1}) \cdot (c)$$

Sia $T: V \to V$ lineare, sia $w = T(v)$

rispetto a $\mathcal{B}$, T si rappresenta: $(y) = G \cdot (x)$ $\qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

" a $\mathcal{B}'$ " " : $(y') = G' \cdot (x')$

Problema: trovare G', data G

$$(y) = G \cdot (x)$$

$$F \cdot F^{-1} \cdot (y') = F \cdot G \cdot F^{-1} (x')$$

$$(y') = F \cdot G \cdot F^{-1} (x') \implies G' = F \cdot G \cdot F^{-1}$$

Sia q una forma quadratica su V

rispetto a $\mathcal{B}$ sia rappresentata da $q(v) = {}^t(x) \cdot A \cdot (x)$

" " $\mathcal{B}'$ " " " $q(v) = {}^t(x') \cdot A' \cdot (x')$

Problema: trovare A' data A

$(x) = F^{-1}(x')$

$$q(v) = {}^t(x) \cdot A \cdot (x) =$$
$$= {}^t\left(F^{-1}\cdot(x')\right) \cdot A \cdot \left(F^{-1}\cdot(x')\right) =$$
$$= {}^t(x')\left({}^t\left(F^{-1}\right)\right) \cdot A \cdot F^{-1}(x')$$

$$\Longrightarrow A' = {}^t\left(F^{-1}\right) \cdot A \cdot F^{-1}$$

TEOR- A simile ad A' $\Longleftrightarrow \exists\, T : V \to V$ lineare! basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$
t.c. T sia rappresentata
da A risp. a $\mathcal{B}$ e
da A' risp a $\mathcal{B}'$

TEOR- A congruente ad A' $\Longleftrightarrow \exists\, q : V \to \mathbb{K}$ quadratica,
e basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$
t.c. q sia rappresentata
da A risp. a $\mathcal{B}$ e
da A' risp. a $\mathcal{B}'$

OSSERVAZIONE:
in uno sp. vett. euclideo, se entrambe le basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sono ortonormali, allora $F \in O_n$ (è una matrice "ortogonale"), cioè $F^{-1} = {}^tF$, in tal caso similitudine e congruenza coincidono.

$T: V \to V$ lineare $\bar{\lambda}$ autovalore di T,
$U_{\bar{\lambda}} = \{ v \in V \mid T(v) = \bar{\lambda} \cdot v \}$ è dunque di dim > 0
autospazio di $\bar{\lambda}$

TEOR - Se, risp. a $\mathcal{B}$, T è rappresentata da $A \in M_n$ allora $\bar{\lambda}$ è una radice di $|\lambda \cdot I_n - A| = 0$

polinomio caratteristica di T

DEF - Moltepl[i]cità algebrica di $\bar{\lambda}$: la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

DEF - Molteplicità geometrica di $\bar{\lambda}$: $\dim U_{\bar{\lambda}}$

PROP - $1 \leq mg(\bar{\lambda}) \leq ma(\bar{\lambda})$

TEOR - Data $A \in M_n$, $\exists$ matrice diagonale simile ad $A \iff \sum mg(\lambda_i) = n$

λ_i autovalori

In tal caso A si dice <u>diagonalizzabile per similitudine</u>

TEOR - A simmetrica $\Rightarrow$ A diagonalizzabile per similitudine.

COR - A simmetrica reale $\Rightarrow$ il polinomio caratteristico di A è privo di radici complesse a parte immaginaria $\neq 0$

Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polinomio a coefficienti reali, $a_0 \neq 0$. Considero la sequenza $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Se qualche coefficiente è nullo, gli assegno arbitrariamente un segno $+$ o $-$.

DEF - La coppia (a_i, a_{i+1}) è detta <u>permanenza</u> se a_i ed a_{i+1} hanno lo stesso segno, <u>variazione</u> altrimenti.

TEOR (di Hariot-Cartesio semplificato):

Se $p(x)$ è privo di radici complesse con parte immaginaria non nulla, allora

il numero di variazioni è = somma delle molteplicità delle radici positive di $p(x)$

il numero di permanenze è = somma delle moltepl. delle radici negative di $p(x)$

ESEMPIO: questo è il pol. car. di una matrice simmetrica reale:

$$p(\lambda) = -4143 - 1407\lambda + 775\lambda^2 + 5\lambda^3 - 19\lambda^4 + \lambda^5$$

$$(-4143, -1407, 775, 5, -19, 1)$$

n. var = 3

n. perm = 2

Contando ogni radice con la sua molteplicità, $p(x)$ ha 3 radici >0 e 2 radici <0