Classificazione delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Rango 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad X_0^2 = 0$$

Im: una retta (che si dice contata 2 volte)

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

la stessa retta

Rango 2

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad X_0^2 + X_1^2 = 0$$

$$\overset{\parallel}{(X_0 + iX_1)}(X_0 - iX_1)$$

Im: unione di 2 rette

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

un punto: l'intersezione delle 2 rette

Rango 3

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$$

Im: insieme di ∞ punti non contenente rette

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \qquad \emptyset$$

Classificazione delle quadriche di $P^3(\mathbb{C})$

Rango 1 $\quad X_0^2 = 0$ $\quad$ Im: un piano (che si dice contato 2 volte)

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad$ lo stesso piano

---

Rango 2 $\quad X_0^2 + X_1^2 = 0$ $\quad$ Im: Unione di 2 piani

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1)$ $\quad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad$ una retta: l'intersez. dei 2 piani

---

Rango 3 $\quad X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ $\quad$ Im: Unione di ∞ rette passanti per un punto (dette generatrici)

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad$ un punto, quello lì

Rango 4 $\quad X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ $\quad$ Im: insieme di ∞ punti, non contenente piani, tale che per ogni punto di Im passano 2 rette (dette generatrici) contenute in Im

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \emptyset$

Classificazione delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Rango 1

$\sigma = (1,0)$ o $(0,1)$ $\quad X_0^2 = 0$ $\quad$ Im: una retta

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad$ la stessa retta

Rango 2

$\sigma = (2,0)$ o $(0,2)$ $\quad X_0^2 + X_1^2 = 0$ $\quad$ Im: un punto

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad$ lo stesso punto

$\sigma = (1,1)$ $\quad X_0^2 - X_1^2 = 0$ $\quad$ Im: unione di 2 rette

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $(X_0 + X_1)(X_0 - X_1)$ $\quad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad$ un punto, l'intersezione delle 2 rette

Rango 3

$\sigma = (3,0)$ o $(0,3)$ $\quad X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ $\quad \Gamma_m : \emptyset$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad W : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

conica immaginaria o vuota

$\sigma = (2,1)$ o $(1,2)$ $\quad X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$

Γ_m: insieme di ∞ punti, non contenente rette

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad W : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

$X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$

Posso assegnare arbitrariamente valori reali a X_0 e X_1, ricaverò comunque un valore per $X_2 = \sqrt{X_0^2 + X_1^2}$

Dovrei prendere un punto generico dell'Γ_m, cioè un $(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ che soddisfi $\tilde{X}_0^2 + \tilde{X}_1^2 - \tilde{X}_2^2 = 0$, ma per semplificare ne prendo uno arbitrario

$\tilde{P} \equiv (1, 0, 1)$. Se ci fosse una retta passante per $\tilde{P}$ contenuta nell'Γ_m, essa sarebbe necessariamente la tangente in $\tilde{P}$, quindi la polare $\tau(\tilde{P})$

$\tau(\tilde{P}) : (1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$ $\quad X_0 - X_2 = 0$; il suo generico punto è $\bar{P} \equiv (\alpha, \beta, \alpha)$

Vediamo per quali α, β $\bar{P} \in \Gamma_m$ (se $\tau(\tilde{P}) \subset \Gamma_m$ avremo una identità)

$\cancel{\alpha^2} + \beta^2 - \cancel{\alpha^2} = 0 \implies \beta = 0 \implies$ solo $\tilde{P}$ stesso $\in \Gamma_m$

Classificazione delle quadriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

Rango 1

$\sigma = (1,0)$ o $(0,1)$ $\quad X_0^2 = 0$ $\quad$ Im: un piano (che si dice contato 2 volte)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

lo stesso piano

Rango 2

$\sigma = (2,0)$ o $(0,2)$ $\quad X_0^2 + X_1^2 = 0$ $\quad$ Im: una retta

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

la stessa retta

$\sigma = (1,1)$ $\quad X_0^2 - X_1^2 = 0$ $\quad$ Im: unione di 2 piani

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (X_0+X_1)(X_0-X_1) = 0$$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

una retta: l'intersez. dei 2 piani

Rango 3

$\sigma = (3,0)$ o $(0,3)$ $\qquad X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0 \qquad$ Im: un punto $\qquad$ Cono (proiettivo) immaginario

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

un punto: lo stesso punto

$\sigma = (2,1)$ o $(1,2)$ $\qquad X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0 \qquad$ Im: unione di ∞ rette (dette generatrici) contenenti uno stesso punto, non contenente piani

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \end{cases}$$

quel punto

cono (proiettivo) reale

Rango 4

$\sigma = (4,0)$ o $(0,4)$ $\quad X_0^2+X_1^2+X_2^2+X_3^2=0$ $\quad$ Im: $\emptyset$

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0=0 \\ X_1=0 \\ X_2=0 \\ X_3=0 \end{cases}$ $\emptyset$

quadrica immaginaria o vuota

$\sigma = (3,1)$ o $(1,3)$ $\quad X_0^2+X_1^2+X_2^2-X_3^2=0$ $\quad$ Im: insieme di ∞ punti, non contenente rette, non contenente piani.

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0=0 \\ X_1=0 \\ X_2=0 \\ -X_3=0 \end{cases}$ $\emptyset$

quadrica ellittica o non rigata

$\sigma = (2,2)$ $\quad X_0^2+X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$ $\quad$ Im: insieme di ∞ punti, non contenente piani, tale che per ogni punto dell'Im passano 2 rette contenute nell'Im (dette generatrici)

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0=0 \\ X_1=0 \\ -X_2=0 \\ -X_3=0 \end{cases}$ $\emptyset$

quadrica iperbolica o doppiamente rigata

In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ $\quad X_0^2+X_1^2-X_2^2=0$

$W=\{V\}$ $\quad V\equiv(0,0,0,1)$

Considero la conica intersezione col piano $X_3=0$

$\Gamma\begin{cases} X_0^2+X_1^2-X_2^2=0 \\ X_3=0 \end{cases}$ So che è formata da ∞ punti e che non contiene rette

Prendo il generico punto di Γ $\tilde{P}\equiv\left(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1,\sqrt{\tilde{X}_0^2+\tilde{X}_1^2},0\right)$

retta $V\tilde{P}$: $\lambda(0,0,0,1)+\mu\left(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1,\sqrt{\tilde{X}_0^2+\tilde{X}_1^2},0\right)=$

$=\left(\mu\tilde{X}_0,\mu\tilde{X}_1,\mu\sqrt{\tilde{X}_0^2+\tilde{X}_1^2},\lambda\right)$

Quali punti della retta $V\tilde{P}$ stanno in Im? Sostituisco in

$X_0^2+X_1^2-X_2^2=0$ $\quad (\mu\tilde{X}_0)^2+(\mu\tilde{X}_1)^2-\left(\mu\sqrt{\tilde{X}_0^2+\tilde{X}_1^2}\right)^2=$

$=\mu^2\left(\cancel{\tilde{X}_0^2}+\cancel{\tilde{X}_1^2}-\left(\cancel{\tilde{X}_0^2}+\cancel{\tilde{X}_1^2}\right)\right)=0 \quad \forall\lambda,\mu$

la retta è contenuta in Im. Siccome Γ non contiene rette, Im non contiene piani

Affinità di A^2 (regolare se det $\neq 0$)

$$\begin{cases} x' = a^1_1 x + a^1_2 y + b_1 \\ y' = a^2_1 x + a^2_2 y + b_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{X_1}{X_0} \quad y = \frac{X_2}{X_0} \qquad x' = \frac{X'_1}{X'_0} \quad y' = \frac{X'_2}{X'_0}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{X'_1}{X'_0} \\ \frac{X'_2}{X'_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{X_1}{X_0} \\ \frac{X_2}{X_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Posso considerare queste equazioni come ottenute dividendo per X_0 e $\lambda X'_0$, da i

$$\lambda \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a^1_1 & a^1_2 \\ b_2 & a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \lambda X'_0 = X_0 \\ \lambda X'_1 = b_1 X_0 + a^1_1 X_1 + a^1_2 X_2 \\ \lambda X'_2 = b_2 X_0 + a^2_1 X_1 + a^2_2 X_2 \end{cases}$$