Data la quadrica $3x^2+2y^2+2z^2+2yz+6y+6z-1=0$

a) la si classifichi

b) si trovino i suoi piani principali

c) verificato che è di rotaz., si trovi il suo asse di rot.

a)
$$A=\begin{pmatrix}-1&0&3&3\\0&3&0&0\\3&0&2&1\\3&0&1&2\end{pmatrix}\quad |A|=3\begin{vmatrix}-1&3&3\\3&2&1\\3&1&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1&0&0\\3&11&10\\3&10&11\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}11&10\\10&11\end{vmatrix}=-63<0$$

$M_1=(3)\quad M_2=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\quad |M_3|=|M_a|\quad |M_1|>0\quad |M_2|>0\quad |M_3|>0$ q. ellittica

ellissoide reale

b)
$$\begin{vmatrix}(3-\lambda)&0&0\\0&(2-\lambda)&+1\\0&+1&(2-\lambda)\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}(2-\lambda)&+1\\+1&(2-\lambda)\end{vmatrix}=(3-\lambda)\left((2-\lambda)^2-(+1)^2\right)=(3-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1)$$
$$=(3-\lambda)^2(1-\lambda)$$

autov.	ma = mg
1	1
3	2

$U_1:\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\cancel{0}\end{pmatrix}\quad\begin{cases}2l=0\\m+n=0\end{cases}\quad (l,m,n)\simeq(0,\gamma,-\gamma)$

$\boxed{\gamma y-\gamma z=0}$

$(0\ 1\ -1)\begin{pmatrix}-1&0&3&3\\0&3&0&0\\3&0&2&1\\3&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=0$

$U_3:\begin{pmatrix}\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{1}\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cancel{0}\\\cancel{0}\\0\end{pmatrix}\quad m-n=0\quad (l,m,n)=(\alpha,\beta,\beta)$

$(0\ \alpha\ \beta\ \beta)$

$\boxed{6\beta+3\alpha x+3\beta y+3\beta z=0}$

c) sono combinazioni lineari dei piani $3x=0$ e $6+3y+3z=0$

asse di rot. $\begin{cases}3x=0\\6+3y+3z=0\end{cases}$

Piano proprio π

$\mathcal{Q} = \mathrm{Im}[f]$

Piano improprio π_∞

Γ conica intersez $\mathcal{Q} \cap \pi$

r_∞ retta impropria di π : $r_\infty = \pi \cap \pi_\infty$

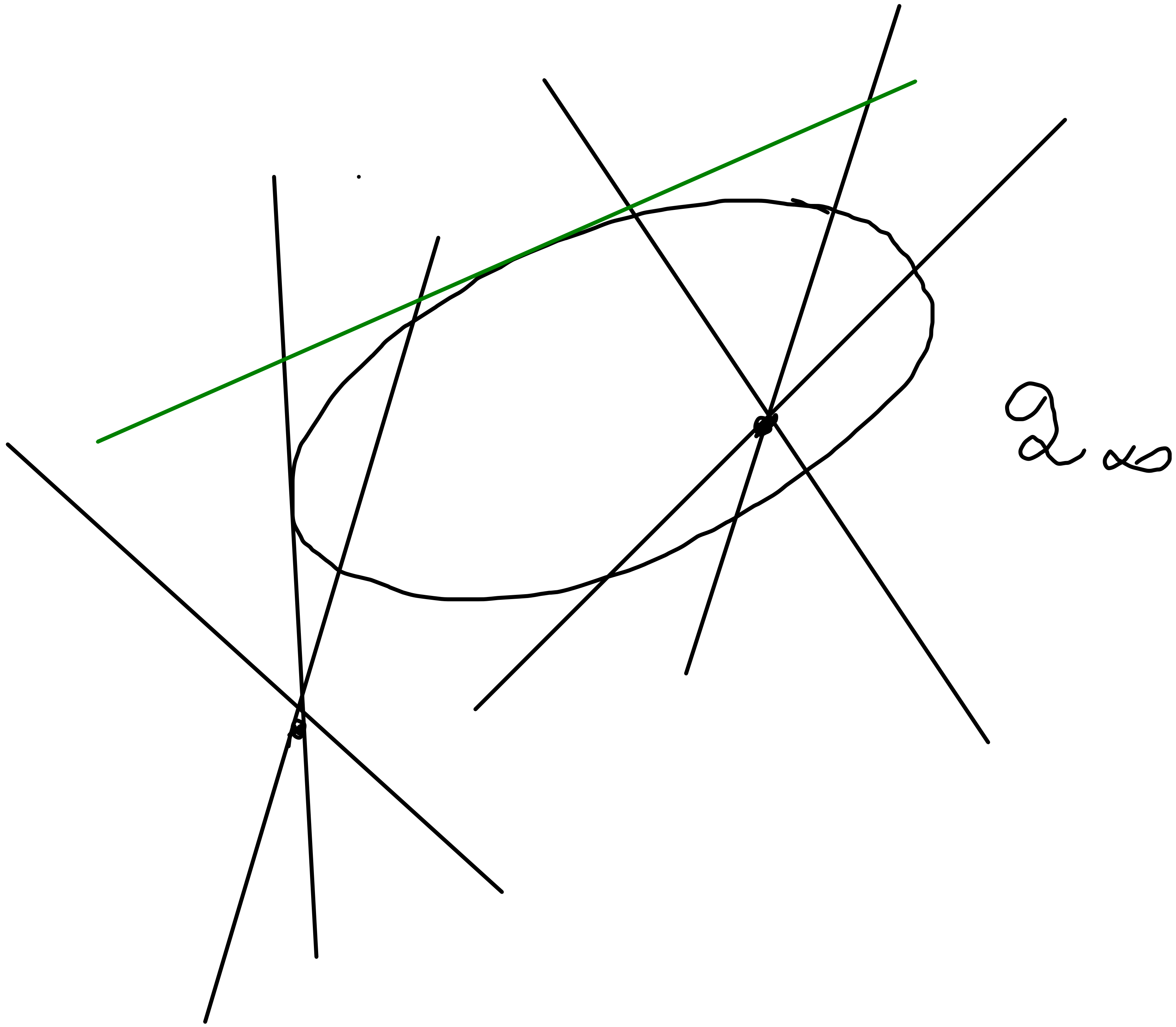
$\mathcal{Q}_\infty$ conica impropria di $\mathcal{Q}$: $\mathcal{Q}_\infty = \mathcal{Q} \cap \pi_\infty$

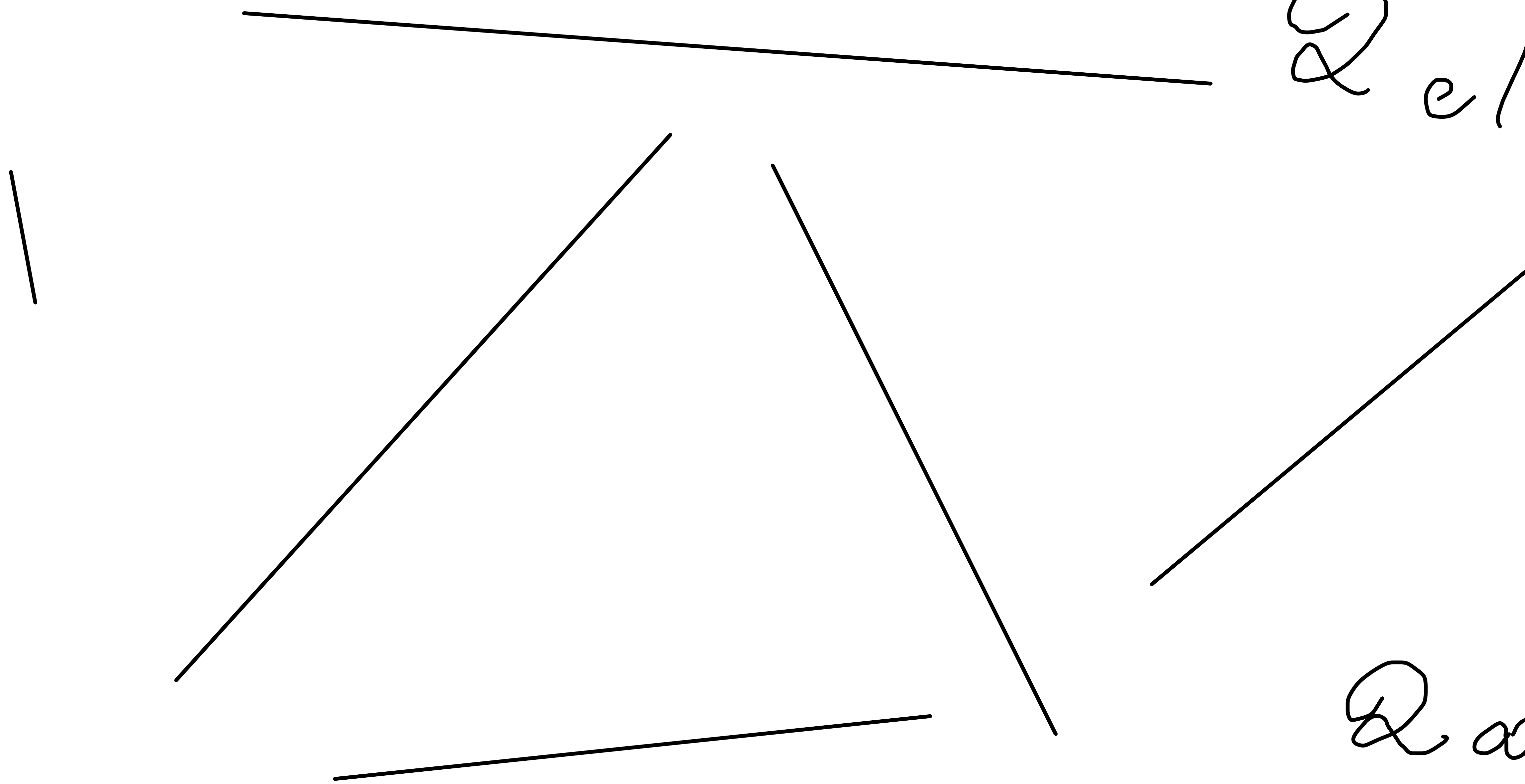
$\Gamma_\infty = \Gamma \cap r_\infty$

Per classificare Γ vado a vedere Γ_∞

$$\Gamma_\infty = \Gamma \cap r_\infty =$$
$$= (\mathcal{Q} \cap \pi) \cap (\pi \cap \pi_\infty) =$$
$$= \mathcal{Q} \cap \pi \cap \pi_\infty =$$
$$= (\mathcal{Q} \cap \pi_\infty) \cap (\pi_\infty \cap \pi) =$$
$$= \mathcal{Q}_\infty \cap r_\infty$$

Q iperboloide

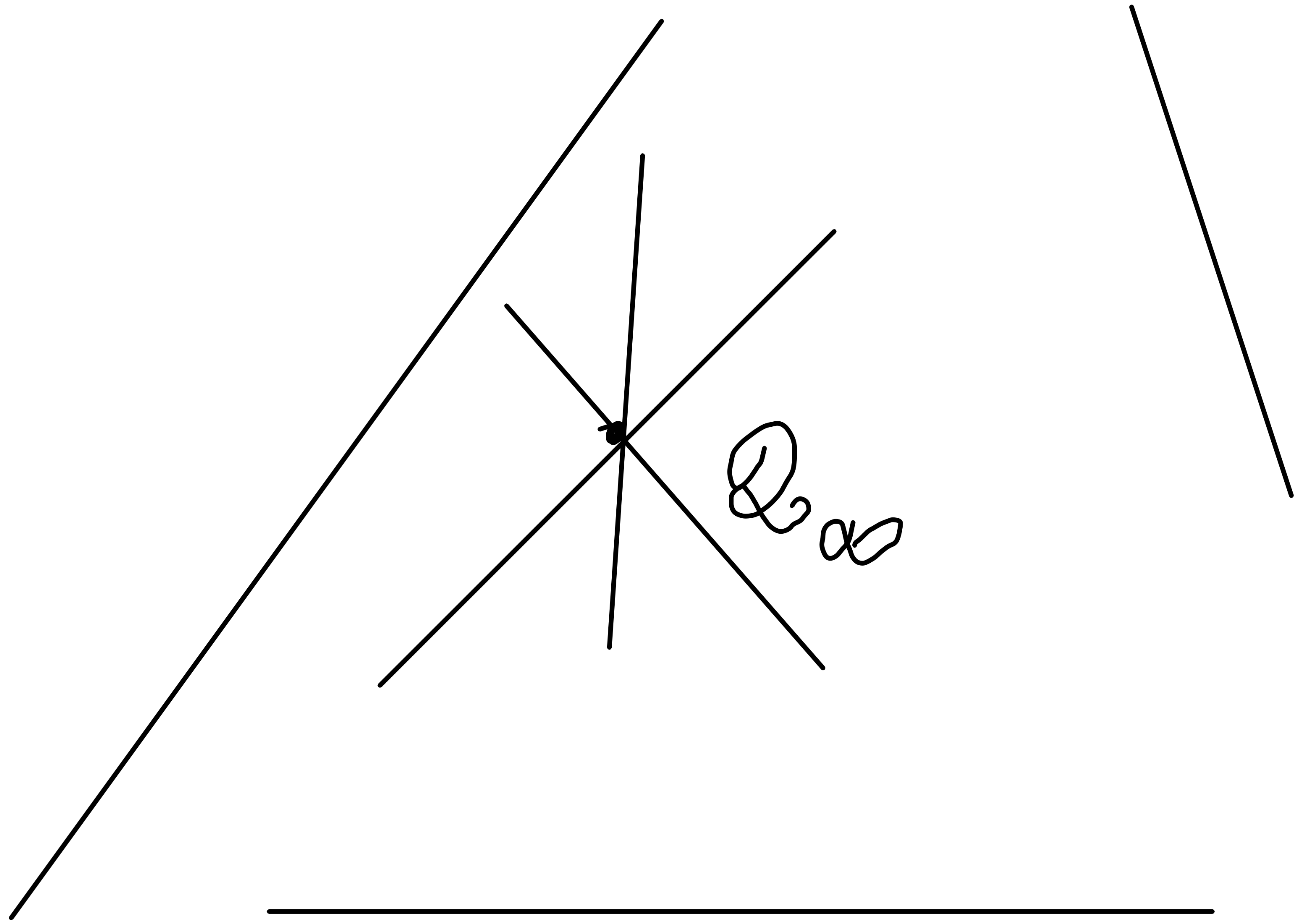




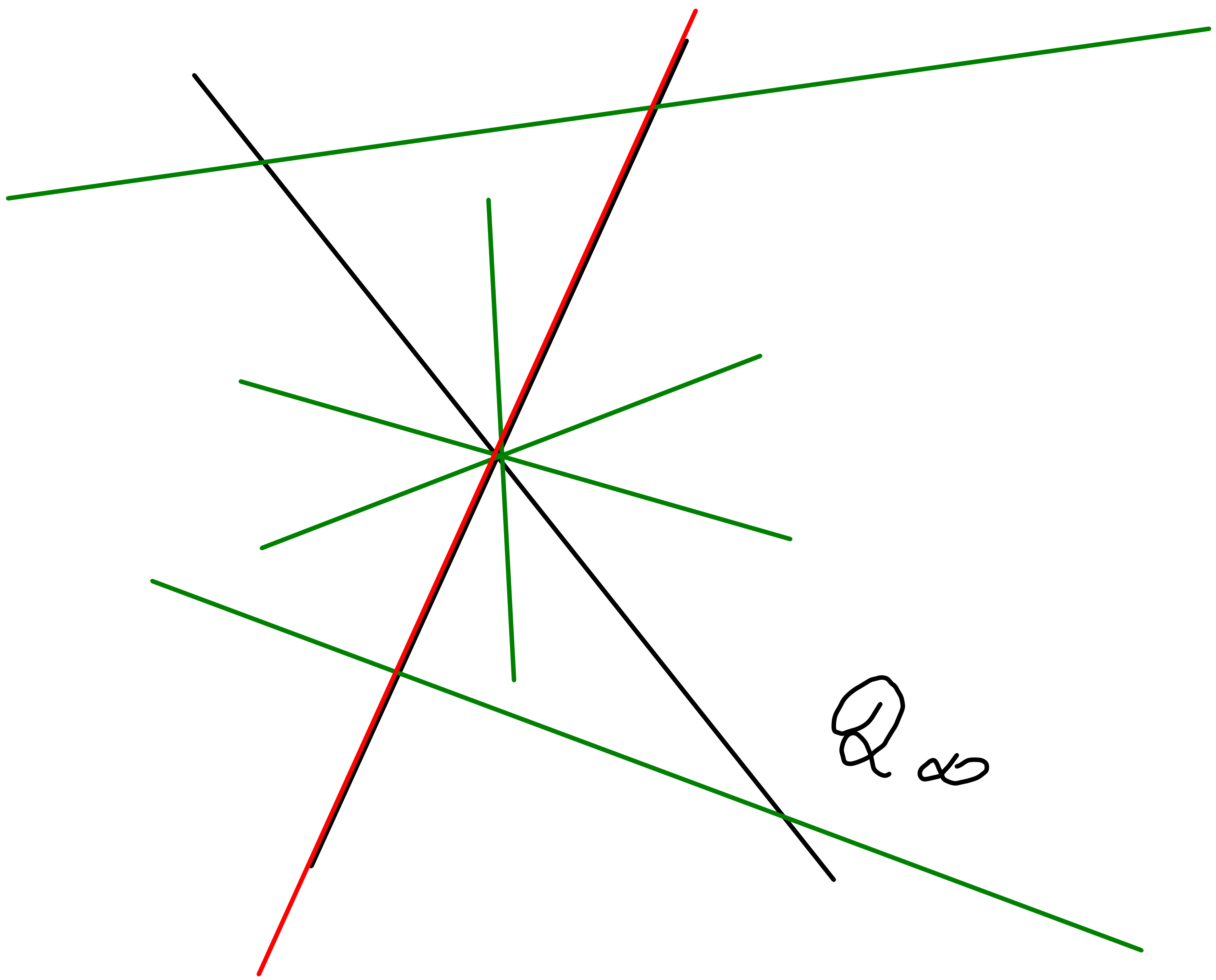
Q ellissoide

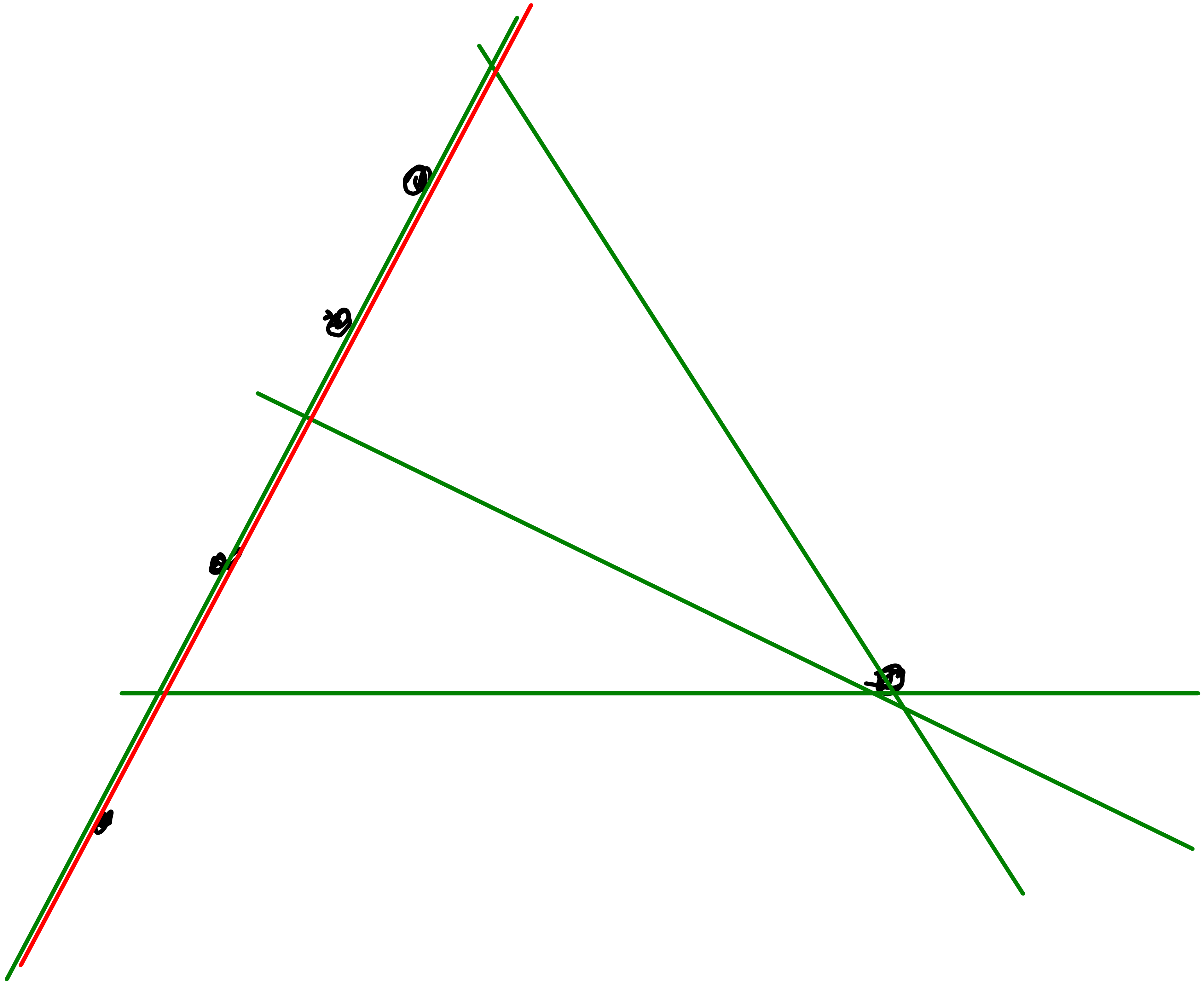
$Q_\infty = \emptyset$

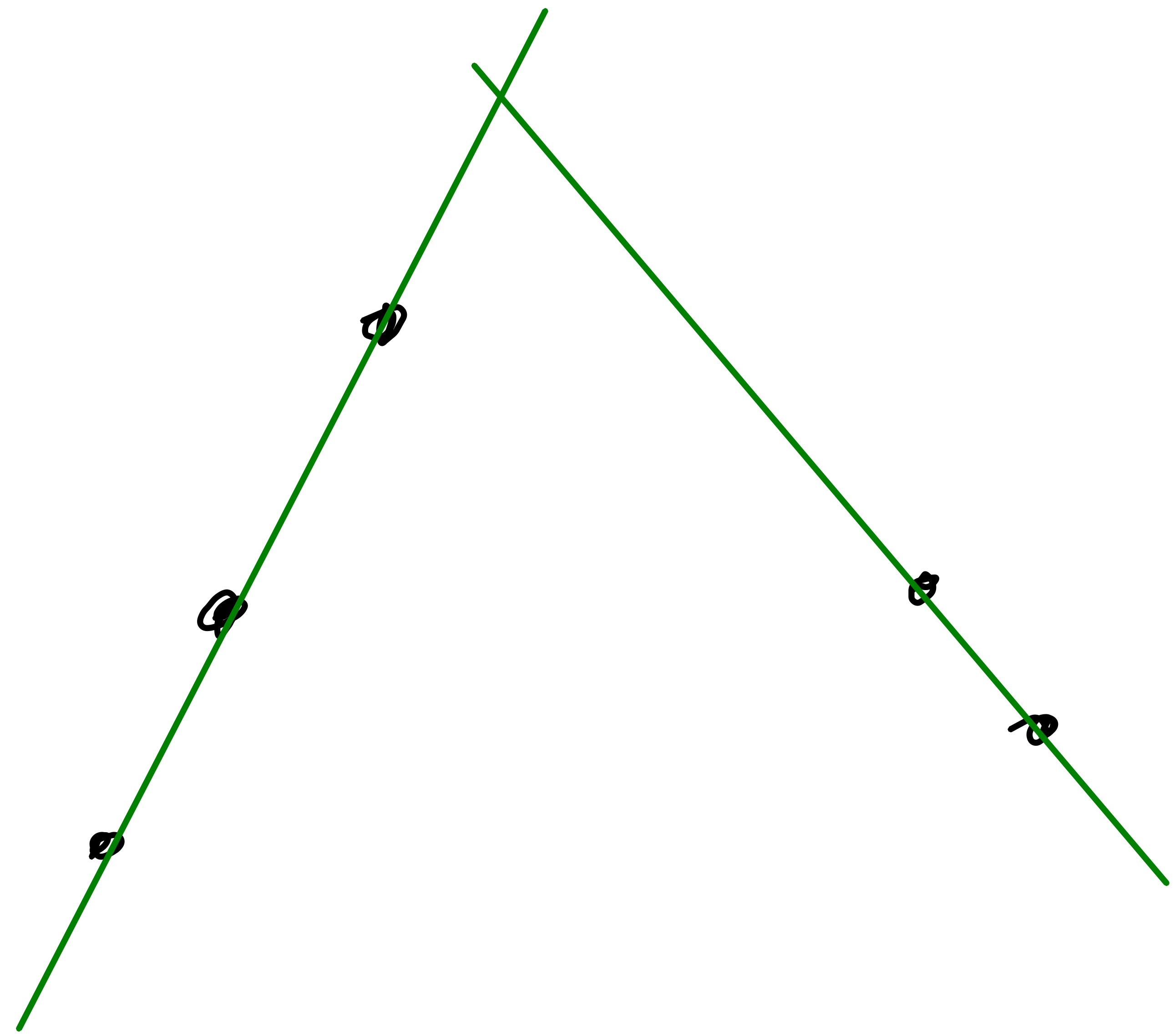
Q paraboloide ellittico



Q: paraboloide iperbolico







$[f]$ A $[g]$ B

$\lambda f + \mu g$ $\lambda A + \mu B$

Sia $\overline{P} \equiv (\overline{X}_0, \overline{X}_1, \overline{X}_2) \in Im[f]$ $(\overline{X}_0 \overline{X}_1 \overline{X}_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = 0$

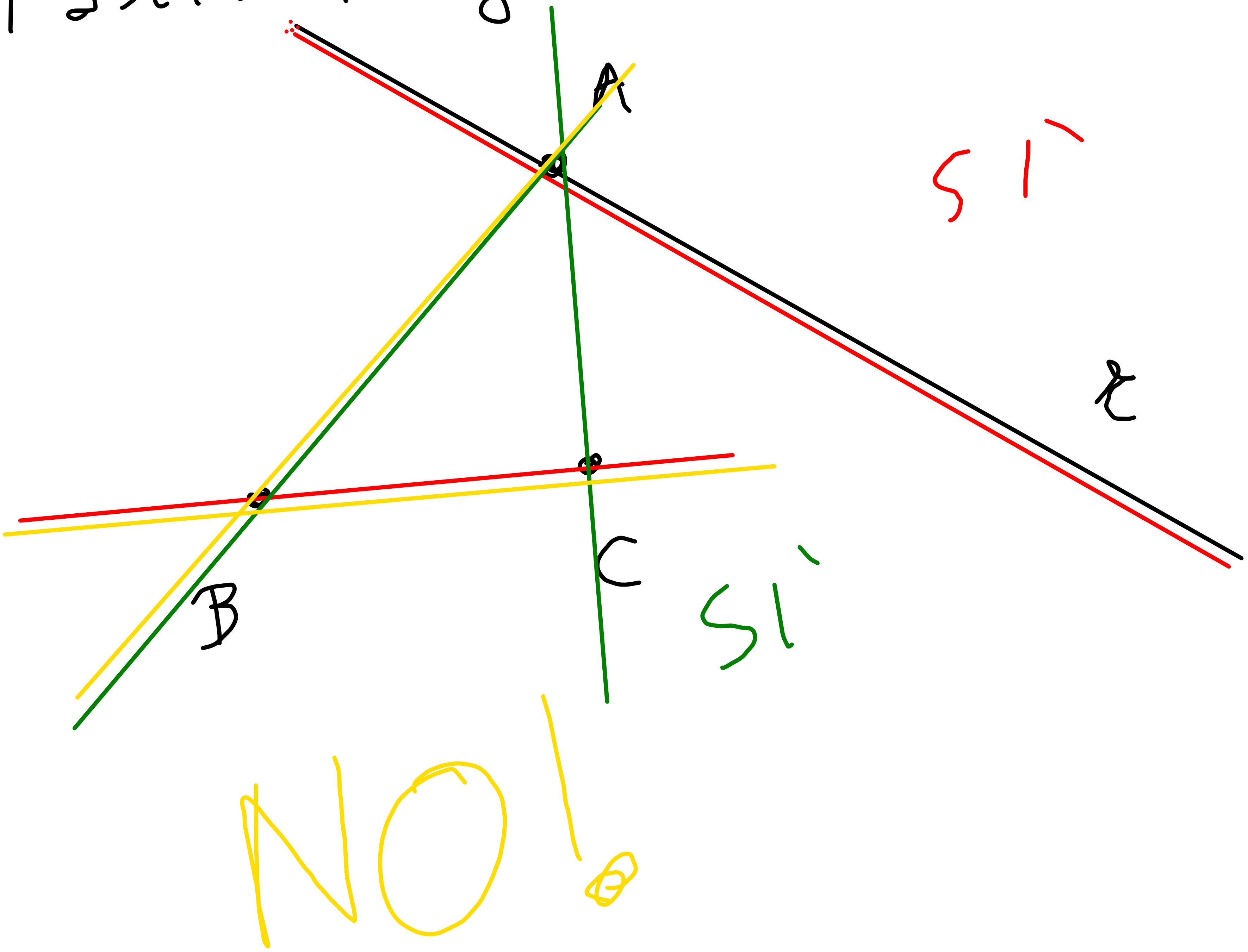
$\in Im[g]$ $(\overline{X}_0 \overline{X}_1 \overline{X}_2) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = 0$

Vediamo che $\overline{P} \in Im[\lambda f + \mu g]$:

$$(\overline{X}_0 \overline{X}_1 \overline{X}_2)\left(\lambda A + \mu B\right)\begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{(\overline{X}_0 \overline{X}_1 \overline{X}_2)\lambda A \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix}}_{\lambda \cdot 0} + \underbrace{(\overline{X}_0 \overline{X}_1 \overline{X}_2)\mu B \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{pmatrix}}_{\mu \cdot 0}$$

$\Rightarrow = 0$

Fascio tangente



Per trovare un fascio di coniche

1) devo avere 2 coniche del fascio
2) se non le ho, cerco 2 coniche degeneri del fascio
3) se non le ho, cerco i punti base del fascio e li uso per trovare 2 coniche degeneri del fascio.

Es: trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche per A, B, C, D,

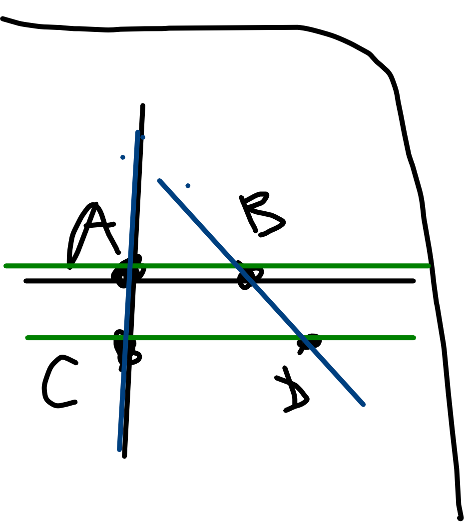
$A \equiv (0,0)$ $B \equiv (2,0)$ $C \equiv (0,-1)$ $D \equiv (3,-1)$

$\Gamma_1 = AB \cup CD$ $\Gamma_2 = AC \cup BD$ $AB: y=0$ $CD: y=-1$

$\Gamma_1: y(y+1)=0$

$AC: x=0$ $BD: \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-0}{-1-0}$ $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1}$ $y+x-2=0$

$\Gamma_2: x(y+x-2)=0$



$\mathcal{F}: \lambda y(y+1) + \mu x(y+x-2) = 0$

Es: trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche per A, B, C e tangenti in B ad $r: x=2$

$AC: x=0 \quad AB: y=0$

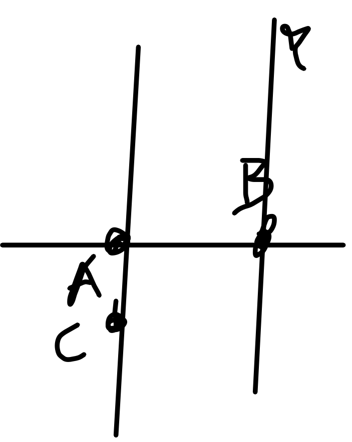
$\Gamma_1 = AC \cup r \quad \Gamma_2 = AB \cup CB$

$CB: \dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-(-1)}{0-(-1)}$

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{1} \quad x-2y-2=0$

$\Gamma_1: x(x-2) \quad \Gamma_2: y(x-2y-2)=0$

$$\mathcal{F}: \lambda x(x-2)+\mu y(x-2y-2)=0$$

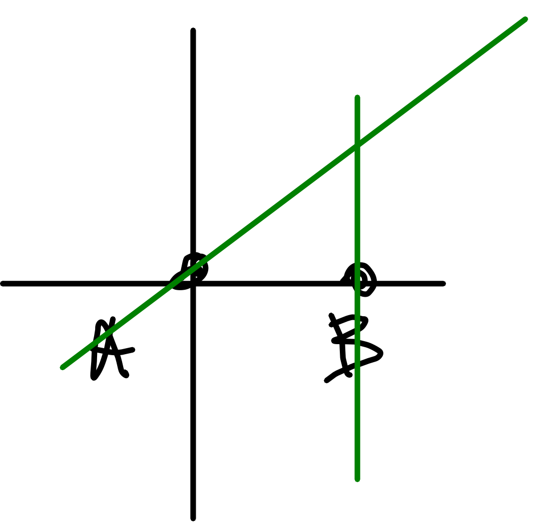


Es: trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche per A e B, tangenti in B ad r e in A ad s: $y = x$

$\Gamma_1 = r \cup s$ $\quad$ $\Gamma_2 =$ AB contata 2 volte

$\Gamma_1: (x-2)(y-x)$ $\quad$ $\Gamma_2: y^2 = 0$

$$\mathcal{F}: \lambda (x-2)(y-x) + \mu y^2 = 0$$



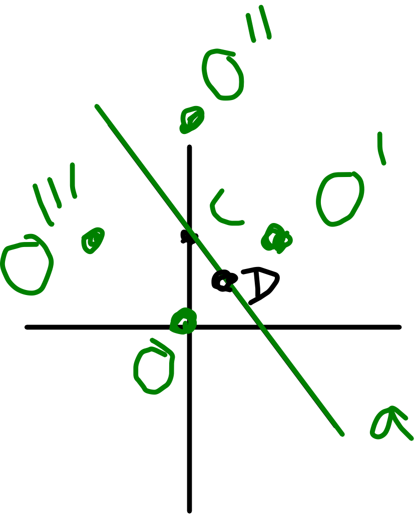
Es: trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche aventi centro $C \equiv (0,1)$, asse $a: x+y-1=0$ e passanti per $O \equiv (0,0)$

Trovo O': trovo la retta b per O, $\perp a$: $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1}$ $\quad x = y$ $\quad x-y=0$

$D = a \cap b$: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-1=0 \\ -2y+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\frac{O+O'}{2} = D$ $\quad O' = 2D - O \equiv (1,1)-(0,0) = (1,1)$

Trovo O'': $\frac{O+O''}{2} = C$ $\quad O'' = 2C - O \equiv (0,2)-(0,0) = (0,2)$



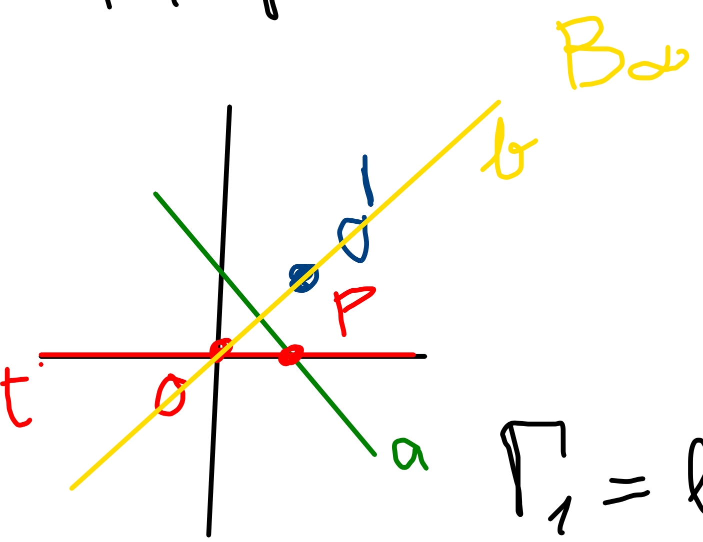
Trovo O''': $\frac{O'+O'''}{2} = C$ $\quad O''' = 2C - O' = (0,2)-(1,1) = (-1,1)$

Poi fascio di 1° tipo.

Es: trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche aventi asse $a: x+y-1=0$ e tangenti in O alla retta $t: y=0$

Le coniche di $\mathcal{F}$ passano per $O' = (1,1)$

Ragionamento: dato un qualunque punto Q su a, la polare di Q deve passare per il polo di a, che è il punto improprio B_∞ rappresentante la direzione $\perp a$ (che è il punto improprio di OO'). Perciò ogni retta $\perp a$ ha il polo su a stessa. In particolare, il polo P di $b = OO'$ deve appartenere ad a. Siccome t è la polare di O, per reciprocità il polo di t deve appartenere anche a t, perciò il polo P di b è $P = a \cap t$. Infine, per reciprocità la retta $O'P$ è tangente in O' alle coniche del fascio



$\Gamma_1 = b$ contata 2 volte $\Gamma_2 = t \cup O'P$

Es1: trovare il fascio $\mathcal{F}$ di parabole aventi $a: x+y-1=0$ come asse e passanti per $O \equiv (0,0)$

Es2: trovare il fascio $\mathcal{F}'$ di parabole aventi a come asse e passanti per $C \equiv (0,1)$