OO'

$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1}$

$x-y=0$

Es1: trovare il fascio $\mathcal{F}$ di parabole aventi $a: x+y-1=0$ come asse e passanti per $O \equiv (0,0)$

Es2: trovare il fascio $\mathcal{F}'$ di parabole aventi a come asse e passanti per $Q \equiv (0,1)$

$OA_\infty : \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1}$

$x+y=0$

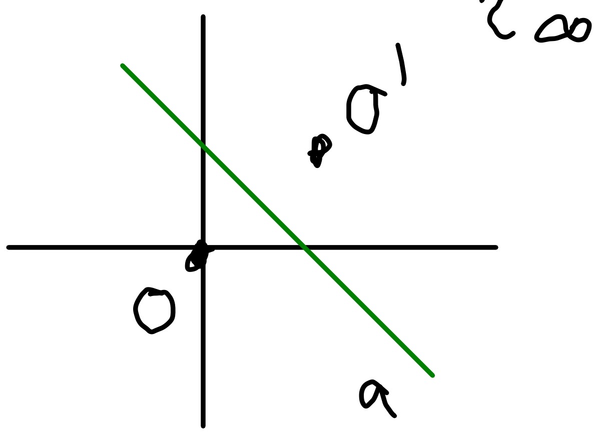
$x+y-2=0$

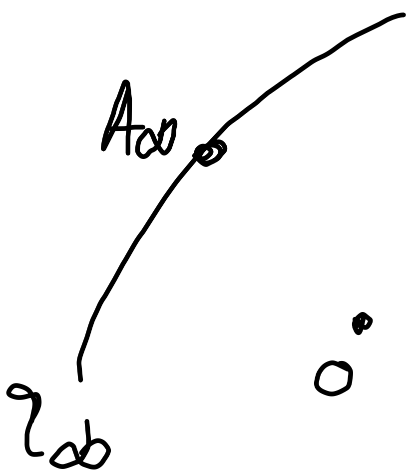
$O'A_\infty : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1}$

Es1 - Trova O' simmetrico di O rispetto ad a $\equiv (1,1)$

Il punto improprio di a, $A_\infty \equiv (0,1,-1)$ è il punto di tangenza di tutte le parabole di $\mathcal{F}$ con

$\Gamma_1 = OA_\infty \cup O'A_\infty \quad \Gamma_2 = OO' \cup r_\infty$





$: (x+y)(x+y-2)=0$

$(X_1+X_2)(X_1+X_2-2X_0)=0$

$(X_1-X_2)X_0=0$

$\mathcal{F}: \lambda(X_1+X_2)(X_1+X_2-2X_0)+\mu(X_1-X_2)X_0=0$

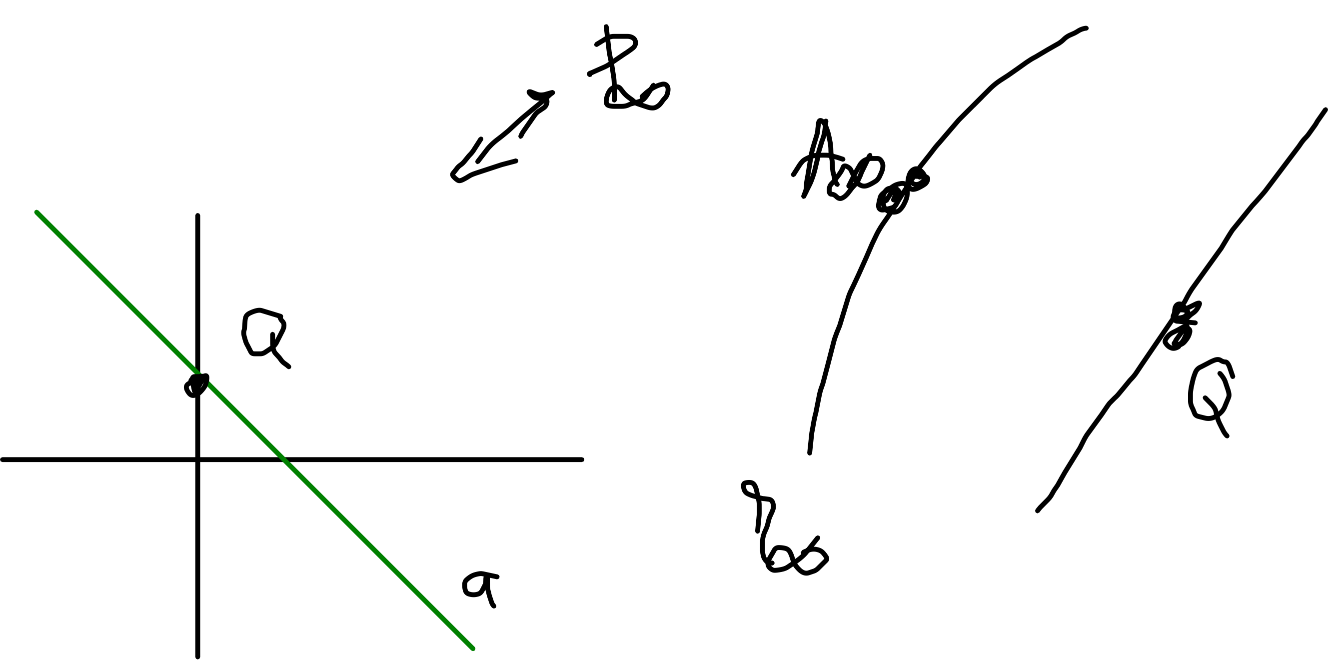
$: \lambda(x+y)(x+y-2)+\mu(x-y)=0$

Es2 – $Q=(0,1) \in a$ è un vertice (euclideo) delle coniche di $\mathcal{F}$. Sia $P_\infty=(0,1,1)$ il punto improprio polo di a, cioè quello rappresentante la direzione $\perp$ ad a.

La polare di P_∞ passa per Q $\Rightarrow$ la polare di Q (cioè la tangente in Q) passa per P_∞; $QP_\infty: \frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{1}$ $\quad x-y+1=0$

$\Gamma_1 = Q\underset{=a}{A_\infty}$ contata 2 volte $\quad (x+y-1)^2=0 \quad (X_1+X_2-X_0)^2=0$

$\Gamma_2 = QP_\infty \cup r_\infty \qquad (X_1-X_2+X_0)X_0=0$



$\mathcal{F}: \lambda(X_1+X_2-X_0)^2+\mu(X_1-X_2+X_0)X_0=0$

$\lambda(x+y-1)^2+\mu(x-y+1)=0$

Numeri direttori di una retta nel piano:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{7} \longrightarrow (l, m) \sim (3, 7)$$

$$\begin{cases} x = 3\alpha + 5 \\ y = 7\alpha + 2 \end{cases} \longrightarrow (l, m) \sim (3, 7)$$

$$7(x-5) - 3(y-2) = 0$$

$$r: 7x - 3y - 29 = 0$$

$$\vec{r}: 7x - 3y = 0 \longrightarrow (-3, -7) \sim (3, 7)$$

Spazio dei vettori liberi di r

in generale:

$ax + by = 0$ sol. $\sim (b, -a)$

Iperpiani $\pi : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, $\pi' : a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = b'$

Rette : r di numeri dir. $(l_1, \dots, l_n)$, r' di numeri dir. $(l'_1, \dots, l'_n)$

(vale con riferimenti anche non ortogonali)

$r \parallel r' \iff (l_1, \dots, l_n) \sim (l'_1, \dots, l'_n)$

$r \parallel \pi \iff a_1l_1 + \dots + a_nl_n = 0$

$\pi \parallel \pi' \iff (a_1, \dots, a_n) \sim (a'_1, \dots, a'_n)$

(vale SOLO con riferimenti ortogonali)

$r \perp r' \iff l_1l'_1 + \dots + l_nl'_n = 0$

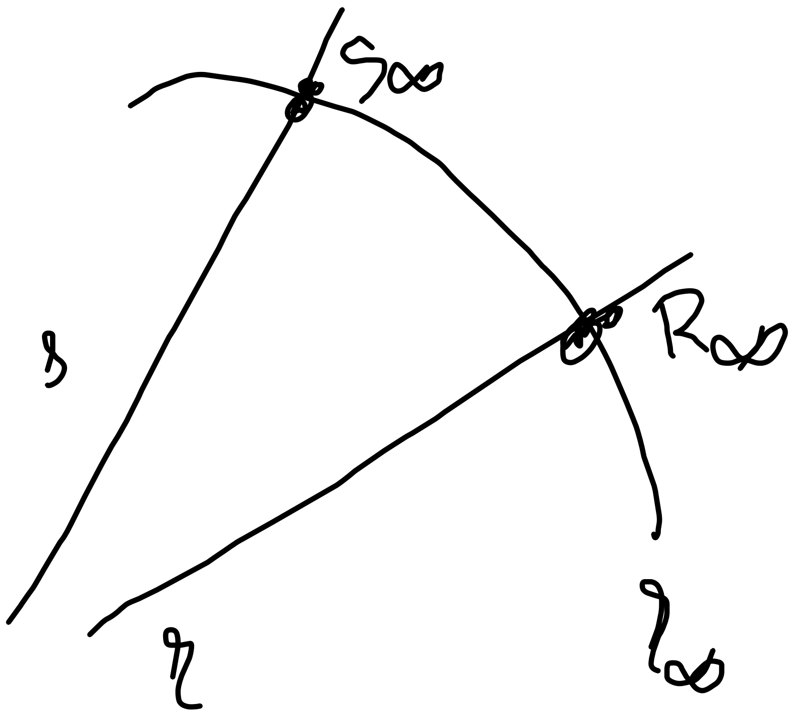
$r \perp \pi \iff (l_1, \dots, l_n) \sim (a_1, \dots, a_n)$

$\pi \perp \pi' \iff a_1a'_1 + \dots + a_na'_n = 0$

Es: fascio $\mathcal{F}$ di iperboli aventi come asintoti

$r: x - 2y = 0$, $s: x + y - 3 = 0$

Trovo i punti impropri di r ed s: $R_\infty \equiv (0,2,1)$, $S_\infty \equiv (0,1,-1)$



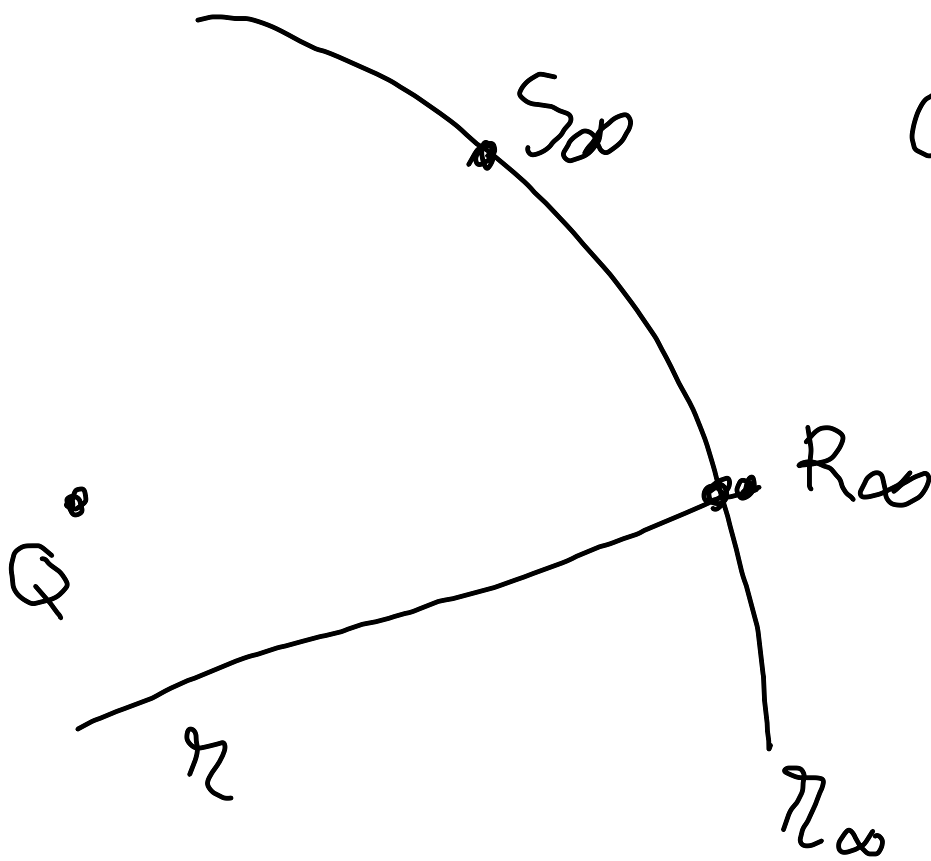
$\Gamma_1 = r \cup s$ $\qquad$ $\Gamma_2 = r_\infty$ contata 2 volte

$: (X_1 - 2X_2)(X_1 + X_2 - 3X_0)$ $\qquad$ $: X_0^2 = 0$

$$\mathcal{F}: \lambda (X_1 - 2X_2)(X_1 + X_2 - 3X_0) + \mu X_0^2 = 0$$

$$: \lambda (x - 2y)(x + y - 3) + \mu = 0$$

Es: fascio di iperboli passanti per $Q \equiv (0,1)$, aventi come asintoto $r: x-2y=0$ e l'altro asintoto parallelo ad $s: x+y-3=0$



$\Gamma_1 = QS_\infty \cup r$

$(x+y-1)(x-2y)$

$\Gamma_2 = QR_\infty \cup \underbrace{R_\infty S_\infty}_{= r_\infty}$

$(X_1-2X_2+2X_0)X_0=0$

$QS_\infty =$ retta per Q, $\parallel s$: $1(x-0)+1(y-1)=0$

$x+y-1=0$

$QR_\infty =$ retta per Q, $\parallel r$: $1(x-0)-2(y-1)=0$

$x-2y+2=0$

$\mathcal{F}: \lambda(x+y-1)(x-2y)+\mu(x-2y+2)=0$

Es 1a - Trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche a centro aventi per asse $r: 2x+y-2=0$ e aventi un vertice in $O=(0,0)$

La retta s per O, $\perp r$ è essa stessa un asse delle coniche di $\mathcal{F}$. Anche O', simmetrico di O rispetto ad r, è vertice. Per reciprocità, le tangenti t, t' in O e O' sono $\parallel r$

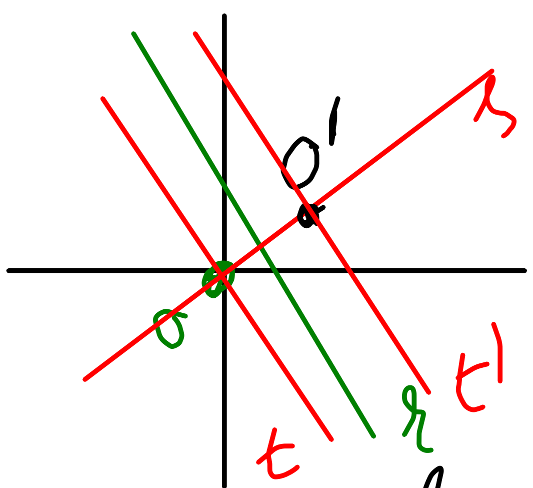
$\Gamma_1 = s$ contata 2 volte

$\Gamma_2 = t \cup t'$

$r \cap s: \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y-2=0 \end{cases} \begin{cases} x-2y=0 \\ 5y-2=0 \end{cases}$

$s: \dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-0}{1} \quad x-2y=0$

$M \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$



$\dfrac{OO'}{2} = M \quad O' = 2M - O = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) \quad t: 2x+y=0 \quad t': 2\left(x-\frac{8}{5}\right)+1\left(y-\frac{4}{5}\right)=0$

$2x+y-4=0$

$\mathcal{F}: \lambda(x-2y)^2 + \mu(2x+y)(2x+y-4) = 0$

$k = \lambda/\mu$

$\mathcal{F}: k(x^2-4xy+4y^2)+(4x^2+4xy+y^2-8x-4y)=0$

$(k+4)x^2+4(1-k)xy+(4k+1)y^2-8x-4y=0$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & (k+4) & 2(1-k) \\ -2 & 2(1-k) & (4k+1) \end{pmatrix}$$

Es 1/6 trovare la conica Γ di $\mathcal{F}$ rispetto a cui siano coniugati i punti $Y_\infty \equiv (0,0,1)$ ed $A \equiv (0,1) \; (1,0,1)$

Impongo

$(0\;0\;1)\cdot B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}-2 & 2(1-k) & (4k+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0 \qquad -2+4k+1=0$

$4k=1$

$k=\frac{1}{4}$

Es 2$_a$: Detta $\mathcal{P}$ la parabola tale che i) $V \equiv (0,1)$ sia vertice, ii) $d: y = 2x - 2$ sia un diametro, iii) d sia il diametro coniugato alla direzione dell'asse x, trovarla

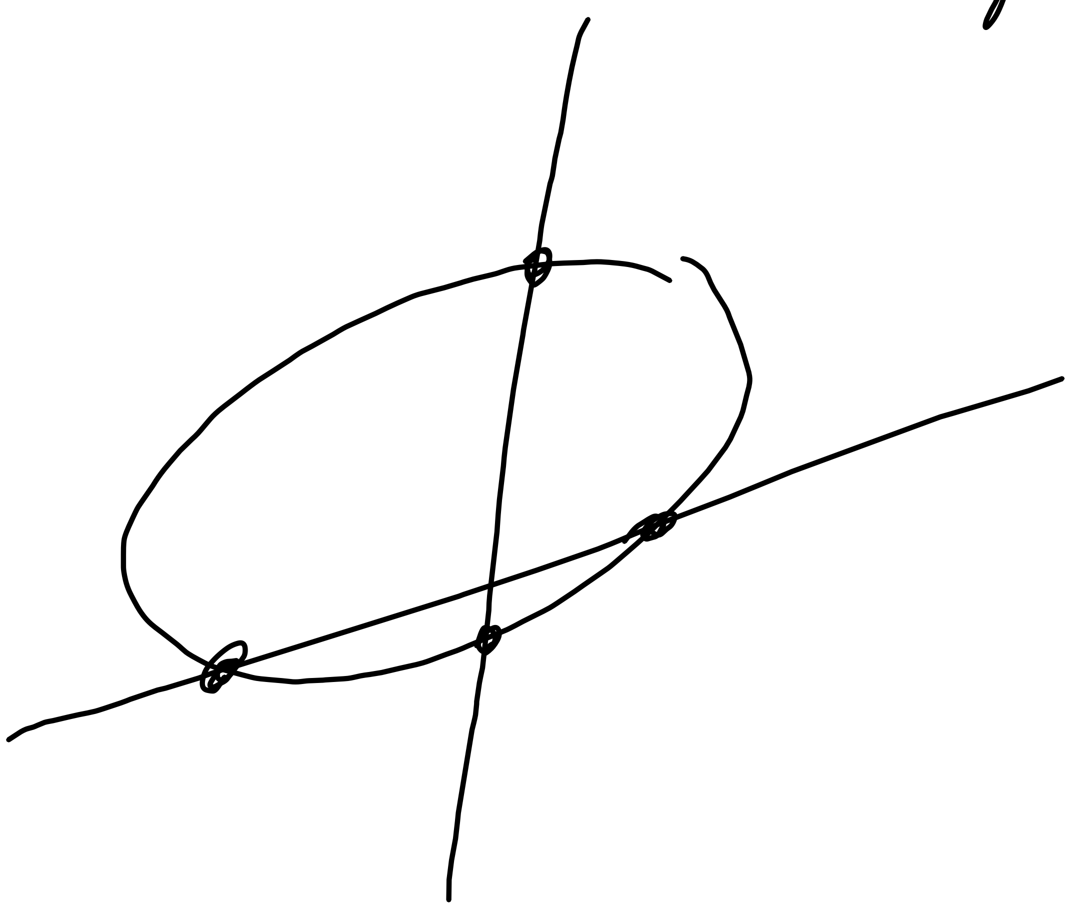
---

Trovo il fascio $\mathcal{F}$ di parabole soddisfacenti i) ed ii):
La retta a per V, $\parallel d$ è l'asse delle parabole di $\mathcal{F}$.
La retta t per V, $\perp a$ ($e \perp d$) è tangente a tutte le par. di $\mathcal{F}$.
$\Gamma_1 = a$ contata 2 volte, $\Gamma_2 = t \cup r_\infty$
Trovato $\mathcal{F}$, impongo che, rispetto alla sua generica conica $X_\infty \equiv (0,1,0)$ e un punto arbitrario $D \in d$ siano coniugati.

Es 17: $r: y=0$, $s: y=2x$ $\quad \Gamma: 2xy-y^2-2x+3y+4=0$

a) trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per i punti di intersezione di Γ con r ed s.

$$\mathcal{F}: \lambda(y-2x)y+\mu(2xy-y^2-2x+3y+4)=0$$



Sia r: $(a+ib)x + (c+id)y + (e+if) = 0$ immaginaria

metto a sistema con ~~Considera~~ $\bar{r}$:

$$\begin{cases} (a+ib)x + (c+id)y + (e+if) = 0 \\ (a-ib)x + (c-id)y + (e-if) = 0 \end{cases}$$

il sistema è equivalente a quello ottenuto sostituendo la prima equazione con la somma e la seconda con la differenza:

$$\begin{cases} 2ax + 2cy + 2e = 0 \\ 2ibx + 2idy + 2if = 0 \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} ax + cy + e = 0 \\ bx + dy + f = 0 \end{cases}$$

quindi l'intersezione $r \cap \bar{r}$ è l'intersezione di due rette reali, quindi è reale.

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\begin{cases} X_1^2+X_2^2+aX_1X_0+bX_2X_0+cX_0^2=0 \\ X_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1^2+X_2^2=0 \\ X_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0=0 \\ X_2=\pm\sqrt{-X_1^2} \end{cases}$$

$(0,i,1)$ $(0,-i,1)$