Nel piano, sia $\Gamma: x^2-6xy+y^2-2xt-t^2=0$
sia $r: x+y=0$. Trovare il polo di r rispetto a Γ

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -3\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

Prendo 2 punti arbitrari su r:

$O\equiv(1,0,0)$ $R_\infty\equiv(0,1,-1)$

$$\begin{matrix}(1\ 0\ 0)\\ (0\ 1\ -1)\end{matrix}\ A\cdot\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$$

pol. di O

$-1-x=0$

$-1+4x-4y=0$

pol. di R_∞

$$\begin{cases}x=-1\\ 4x-4y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1\\ y=\dfrac{4x-1}{4}=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

Polo di r: $P\equiv\left(-1,-\frac{5}{4}\right)$

Nello spazio ordinario, sia

$$X_1^2 + 2X_2^2 - 2X_2X_3 - 4X_2X_0 + X_0^2$$

$Q: x^2 + 2y^2 - 2yz - 4y + 1 = 0$, sia $\pi: x + y + 2z - 2 = 0$

Trovare il polo di π rispetto a Q.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Scelgo 3 punti lin. indip su π

$P_1 \equiv (1, 0, 0, 1)$

$P_2 \equiv (1, 0, 2, 0)$

$P_3 \equiv (1, 2, 0, 0)$

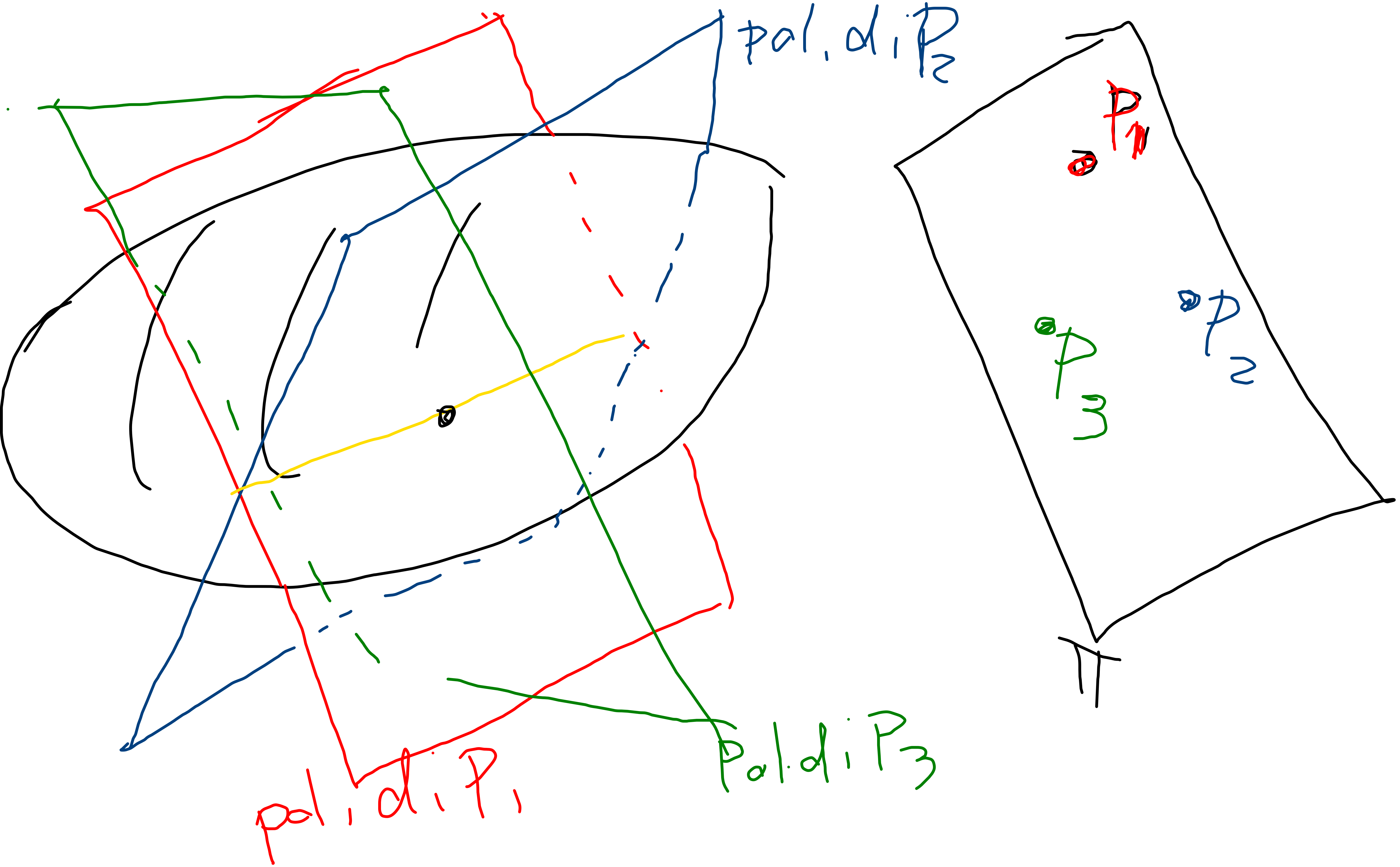
Ne faccio i piani polari:

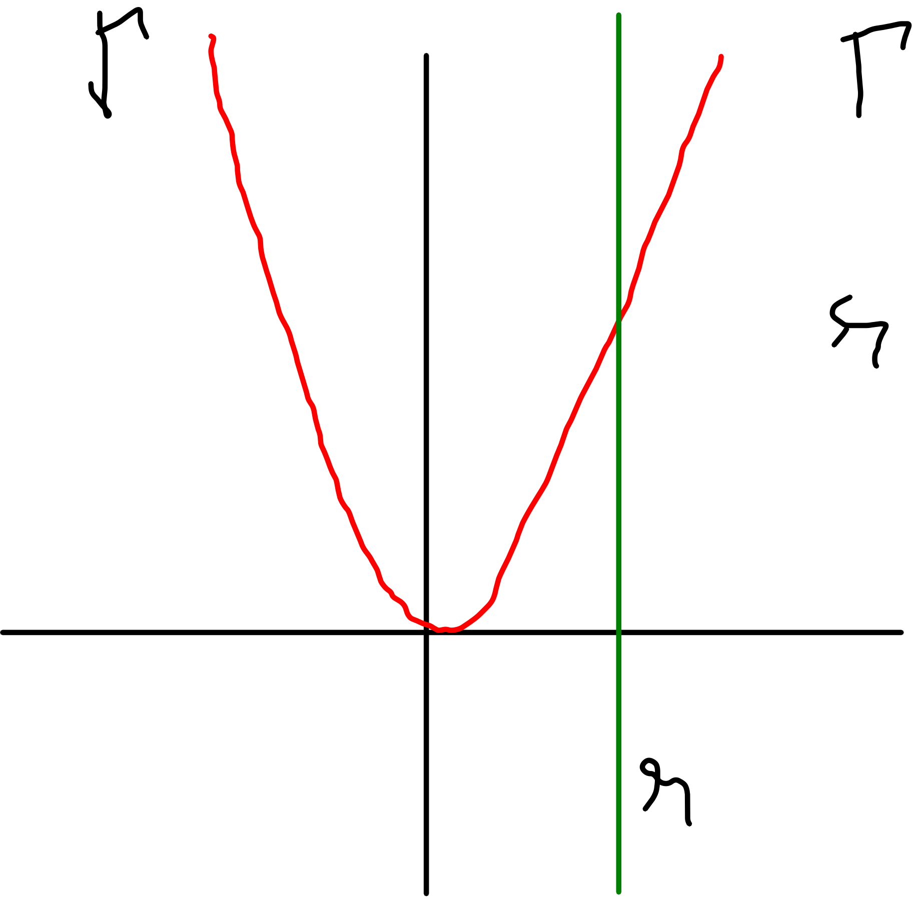
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

polo di π
$$\begin{cases} \text{pol. di } P_1: 1 - 3y = 0 \\ \text{pol. di } P_2: -3 + 2y - 2z = 0 \\ \text{pol. di } P_3: 1 + 2x - 2y = 0 \end{cases}$$


pol. di P_2
P_1
P_2
P_3
Π
pol. di P_1
Pol. di P_3



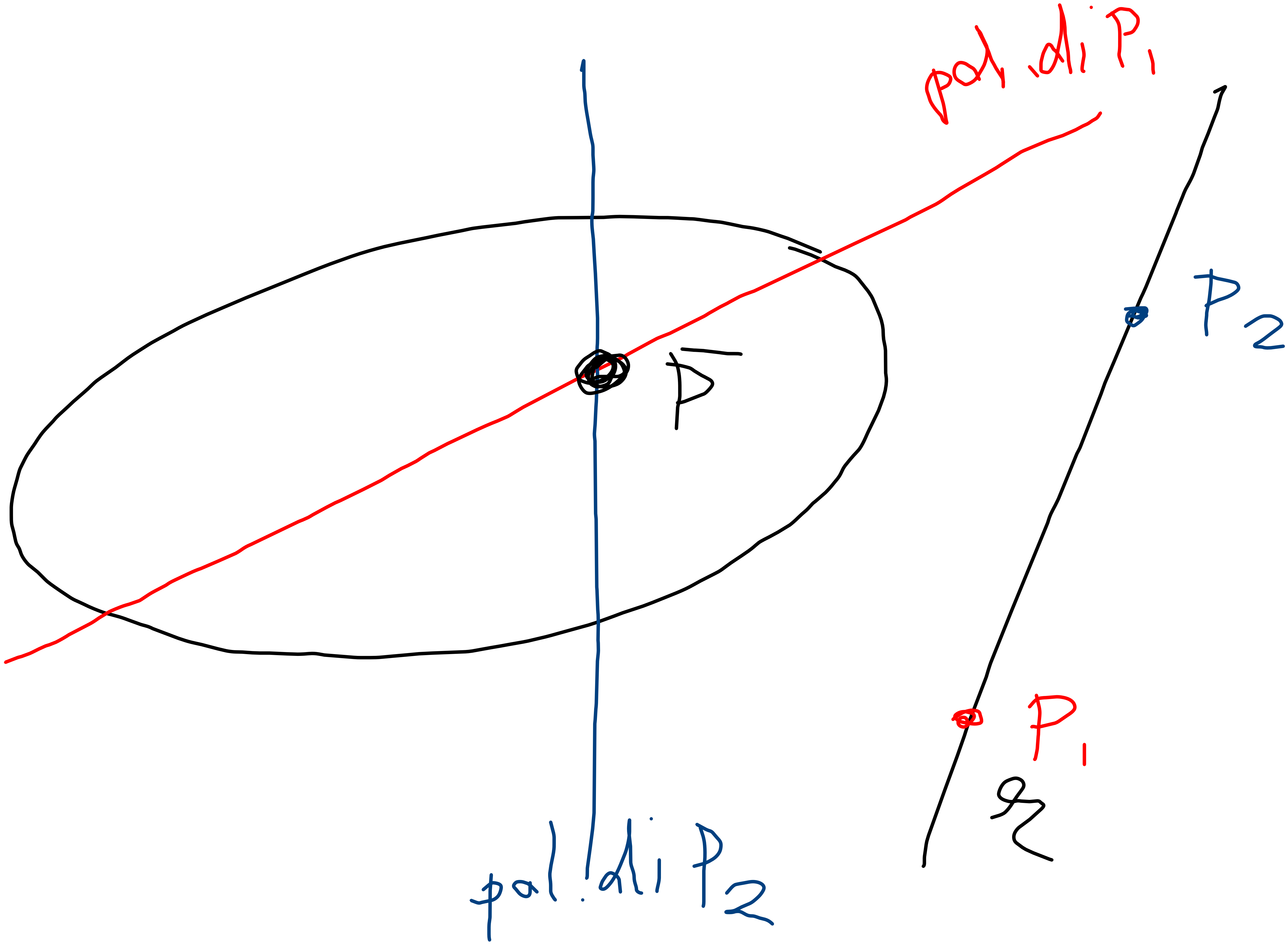
$$\Gamma: \left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ r: \; x = 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y = 9 \\ x = 3 \end{array}\right. \qquad \frac{X_2}{X_0} = \frac{X_1^2}{X_0^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_1^2 - X_2 X_0 = 0 \\ X_1 = 3X_0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 9X_0^2 - X_2 X_0 = 0 \\ X_1 = 3X_0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_0(9X_0 - X_2) = 0 \\ X_1 = 3X_0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_0 = 0 \\ X_1 = 3X_0 \end{array}\right. \qquad (0, 0, 1)$$

$$\left\{\begin{array}{l} 9X_0 - X_2 = 0 \\ X_1 = 3X_0 \end{array}\right. \qquad (1, 3, 9)$$



pol. di P1
P̄
P2
P1
r
pol. di P2

In uno spazio $\mathbb{P}^n$ ho la iperquadrica $[f]$ di discriminante A, di immagine $\mathcal{Q} = \mathrm{Im}[f]$. L'eq. di $[f]$ è:

$$(X_0 \cdots X_n)\, A \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = 0 \qquad {}^t(X) \cdot A \cdot (X) = 0$$

Siano $P \equiv \begin{pmatrix} \bar{Y}_0 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix} = (\bar{Y})$, $R \equiv \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \vdots \\ \bar{Z}_n \end{pmatrix} = (\bar{Z})$ punti distinti di $\mathbb{P}^n$.

Cerco le intersezioni della retta $r = PR$ con $\mathcal{Q}$.

Il generico punto della retta r è dato da

$\lambda(\bar{Y}) + \mu(\bar{Z})$ con $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

Per intersecare r con $\mathcal{Q}$, sostituisco questo espressione al posto di (X): $(X) = \lambda(\bar{Y}) + \mu(\bar{Z})$

$${}^t\left(\lambda(\bar{Y})+\mu(\bar{Z})\right)\cdot A\cdot\left(\lambda(\bar{Y})+\mu(\bar{Z})\right)=0$$

$${}^t\left(\lambda(\bar{Y})\right)\cdot A\cdot\left(\lambda(\bar{Y})+\mu(\bar{Z})\right)+{}^t\left(\mu(\bar{Z})\right)\cdot A\cdot\left(\lambda(\bar{Y})+\mu(\bar{Z})\right)=0$$

$$\lambda\,{}^t(\bar{Y})\cdot A\cdot\lambda(\bar{Y})+\lambda\,{}^t(\bar{Y})\cdot A\cdot\mu(\bar{Z})+\mu\,{}^t(\bar{Z})\cdot A\cdot\lambda(\bar{Y})+\mu\,{}^t(\bar{Z})\cdot A\cdot\mu(\bar{Z})=0$$

$=$

$$*\qquad \lambda^2\,{}^t(\bar{Y})\cdot A\cdot(\bar{Y})+2\lambda\mu\,{}^t(\bar{Y})\cdot A\cdot(\bar{Z})+\mu^2\,{}^t(\bar{Z})\cdot A\cdot(\bar{Z})=0$$

Dimostro: Sia $P \equiv (\bar{Y}) \in Im[f] - W[f]$. Sia $R \equiv (\bar{Z}) \in \mathbb{P}^n$ tale che la retta $r = PR$ sia tangente a $[f]$ in P. Allora $R \in \tau(P)$

Uso $*$:

$$\lambda^2 \, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) + 2\lambda\mu \, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Z}) + \mu^2 \, {}^t(\bar{Z}) \cdot A \cdot (\bar{Z}) = 0$$

$= 0$

So che $P \in Im[f]$

Resta: $\mu\left(2\lambda \, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Z}) + \mu \, {}^t(\bar{Z}) \cdot A \cdot (\bar{Z})\right) = 0$

Questo μ in evidenza mi dice che $\mu = 0$ ($\lambda \neq 0$) fornisce una intersezione: $P \in r \cap \mathcal{Q}$. Affinché P sia l'UNICA intersez. (tangenza di tipo (i)) bisogna che sia la soluzione anche del pezzo

$$2\lambda \, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Z}) + \mu \, {}^t(\bar{Z}) \cdot A \cdot (\bar{Z}) = 0$$

Usiamo $k = \frac{\mu}{\lambda}$

$$k \, {}^t(\bar{Z}) \cdot A \cdot (\bar{Z}) = -2 \, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Z}) \qquad k = \frac{-2 \, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Z})}{{}^t(\bar{Z}) \cdot A \cdot (\bar{Z})}$$

$\neq 0$ perché sto supponendo $R \notin \mathcal{Q}$

Verrà $k = 0$, cioè $(\lambda, \mu) = (\lambda, 0)$ con $\lambda \neq 0$, se ${}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Z}) = 0$

E se $r = PR$ è tangente di tipo (ii)? Allora OGNI punto di r è di intersezione, perciò ogni coppia (λ,μ) soddisfa

$$\lambda^2\, {}^t(\overline{Y}) \cdot A \cdot (\overline{Y}) + 2\lambda\mu\, {}^t(\overline{Y}) \cdot A \cdot (\overline{Z}) + \mu^2\, {}^t(\overline{Z}) \cdot A \cdot (\overline{Z}) = 0$$

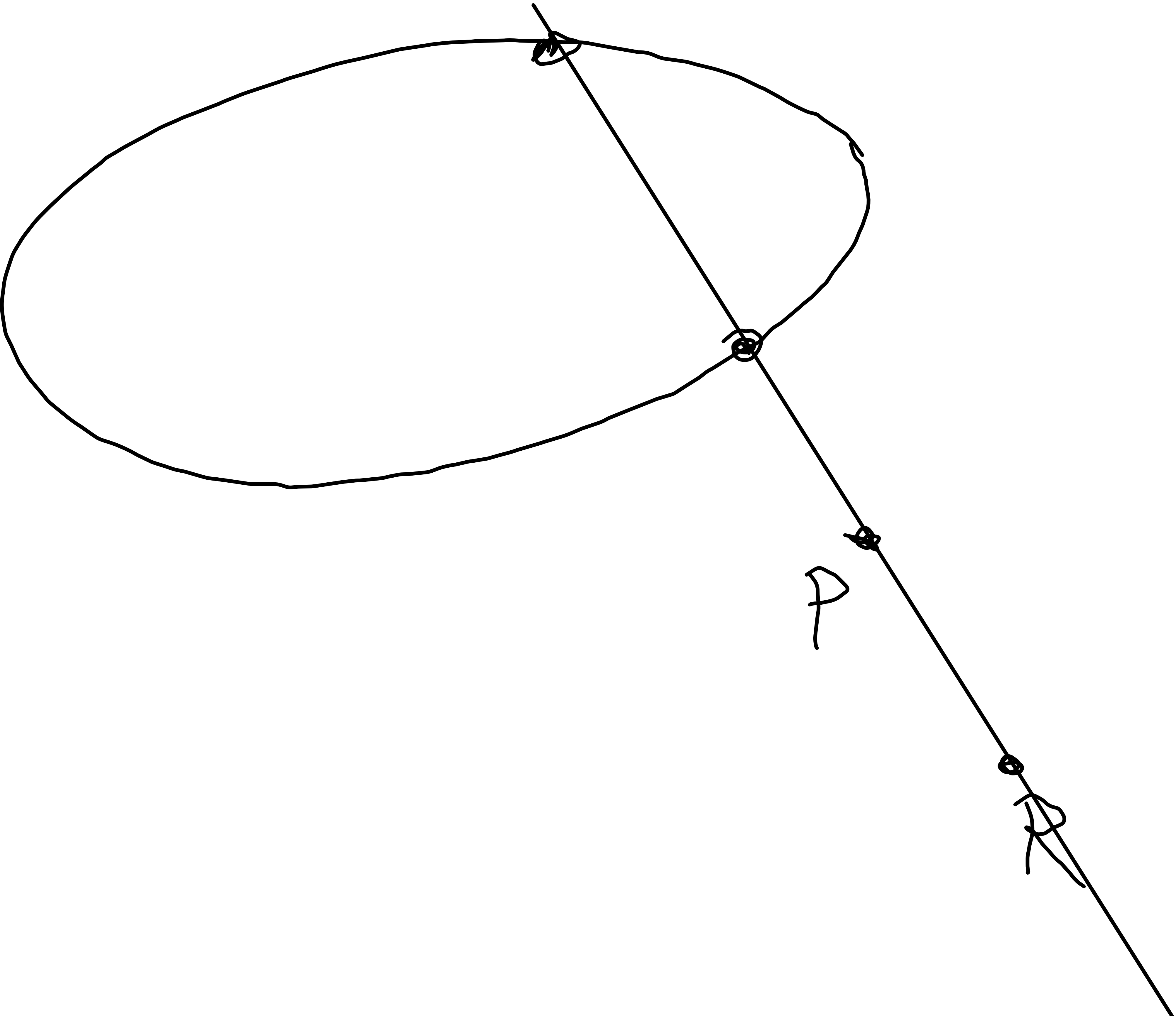
$\ast$ ma questo accade se e solo se tutti i coefficienti sono nulli.

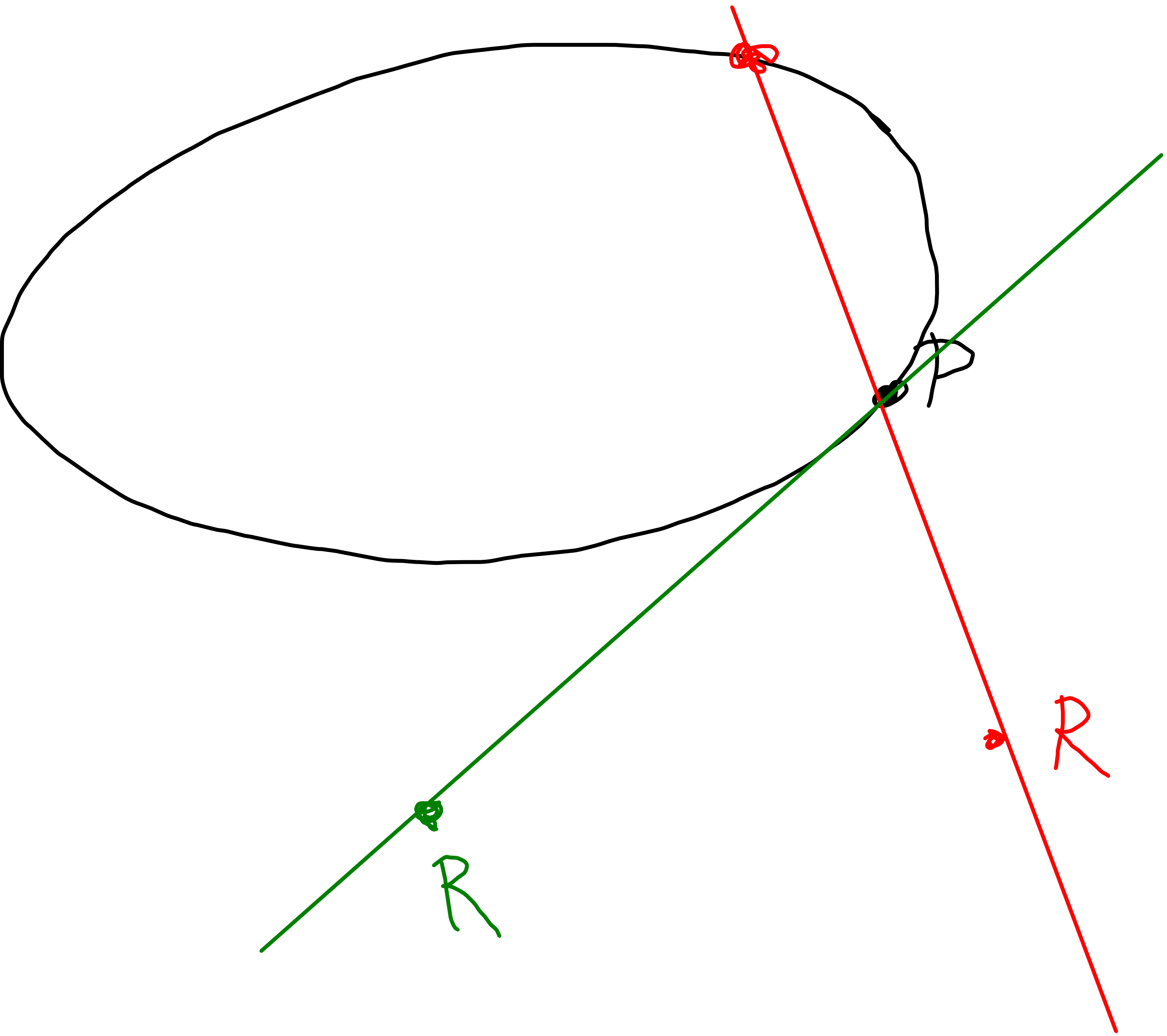
$P \in Q$ $\quad$ $R \in Q$

Ricavo che anche nella tangenza (ii) dev'essere

$= 0 \quad \cancel{\otimes} = 0$. Perciò r è tangente a $[f]$ in P

$\Leftrightarrow {}^t(\overline{Y}) \cdot A \cdot (\overline{Z}) = 0$, cioè $R \in \tau(P)$.


P
R



P
R
R

PROP - $[f]$ iperq. di $\mathbb{P}^n$ non specializzata. $P \equiv (\bar{Y}) \in Q = \mathcal{J}_m[f]$

$\tau(P)$ iperpiano polare di P, quindi iperpiano tang. in P.

Allora $Q \cap \tau(P)$ è o l'insieme $\{P\}$ o una unione di rette contenenti P.

Dim: Se $Q \cap \tau(P) = \{P\}$ abbiamo finito.

Sia $Q \cap \tau(P) \neq \{P\}$, $P \in Q \cap \tau(P)$; ci sarà almeno un altro punto $R \equiv (\bar{Z})$, $R \neq P$, $R \in Q \cap \tau(P)$.

Vediamo l'intersez. fra $r = PR$ e Q. Uso $*$

$$\lambda^2 \, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) + 2\lambda\mu \, {}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Z}) + \mu^2 \, {}^t(\bar{Z}) \cdot A \cdot (\bar{Z}) = 0$$

$P \in Q \Rightarrow 0$ $\qquad$ $R \in \tau(P)$ 0 $\qquad$ $R \in Q \Rightarrow 0$

Ma allora * è un'identità,
cioè tutta la retta r è $\subset \mathcal{Q}$.
Siccome P ed R $\in \tau(P)$ (un iperpiano)
tutta la retta r è $\subset \tau(P)$. Perciò se
$R \in \mathcal{Q} \cap \tau(P)$, allora tutta la retta $r = PR$
è contenuta in $\mathcal{Q} \cap \tau(P)$, da cui la tesi.

Def - $A, A' \in M_{n}$; A si dice simile ad A' se $\exists\, E \in GL_n$ tale che $A' = E^{-1} \cdot A \cdot E$

E invertibile

Def - $A, A \in M_n$ simmetriche, A si dice congruente ad A' se $\exists\, E \in GL_n$ tale che $A' = {}^tE \cdot A \cdot E$

Queste nozioni hanno a che fare con due problemi. Vediamo il primo

Primo problema

Ho un endomorfismo di uno spazio vettoriale V ($\dim V = n$), cioè una trasf. lin. $T: V \to V$. Fisso una base $\mathcal{B}$ e scrivo la matrice $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)$. Questa matrice serve a trovare $T(v)$ date le componenti di v.

$$v \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x) \quad T(v) \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y)$$

$$\boxed{(y) = A \cdot (x)}$$

Se ho una base diversa $\mathcal{B}'$, quale sarà la matrice $A' = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(T)$? Cioè quella A' per cui,

se $v \equiv_{\mathcal{B}'} (x')$ $T(v) \equiv_{\mathcal{B}'} (y')$

$$(y') = A' \cdot (x')$$

?

Rispondo. Ho a disposizione la "matrice del cambiamento di base", cioè una $E \in GL_n$ tale che,

se $v \equiv_{\mathcal{B}} (x)$ $\quad v \equiv_{\mathcal{B}'} (x') = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ allora $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

$$(x) = E \cdot (x')$$

Analogamente,

$T(v) \equiv_{\mathcal{B}} (y)$ $\quad T(v) \equiv_{\mathcal{B}'} (y')$ allora $(y) = E \cdot (y')$

Sostituisco: $\quad (y) = A \cdot (x)$

$$\cancel{E^{-1} \cdot E} \cdot (y') = E^{-1} \cdot A \cdot E\, (x')$$

E è invertibile

$$(y') = E^{-1} \cdot A \cdot E\, (x')$$

$A' =$

Secondo problema — Ho una forma quadratica $f: V \to \mathbb{R}$; la matrice simmetrica ad essa associata rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V sia A, cioè se $v \equiv_{\mathcal{B}} (x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, allora $f(v) = {}^t(x) \cdot A \cdot (x) =$

$$= (x_1 \dots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Problema — Quale sarà la matrice A' associata alla stessa forma quadratica f rispetto a una diversa base $\mathcal{B}'$? Cioè:

se $v \equiv_{\mathcal{B}'} (x')$ allora $f(v) = {}^t(x') \cdot A' \cdot (x')$?

Uso lo stesso cambiamento di base $(x) = E \cdot (x')$

Sostituisco:

$$f(v) = {}^t(x) \cdot A \cdot (x) =$$

$$= {}^t\big(E \cdot (x')\big) \cdot A \cdot \big(E \cdot (x')\big)$$

$$= {}^t(x') \cdot \underbrace{{}^tE \cdot A \cdot E}_{A' =} \cdot (x')$$

PROP - $A, A' \in M_n$ simmetriche sono congruenti $\iff \exists\, V, \mathcal{B}, \mathcal{B}', f$ tali che A rappresenti f rispetto a $\mathcal{B}$ e A' rappresenti f rispetto a $\mathcal{B}'$

PROP - $A, A' \in M_n$ sono simili $\iff$

$\exists\, V, T: V \to V, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ t.c.

$$A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T), \quad A' = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(T)$$