Gruppo, Anello, Campo, Spazio Vettoriale

Gruppo: $(A, \top)$

1) associatività

$\forall a, b, c \in A \quad (a \top b) \top c = a \top (b \top c)$

2) $\exists$ el. neutro $u \in A$

$\forall a \in A \quad a \top u = a = u \top a$

3) $\exists$ inverso

$\forall a \in A \ \exists a' \in A$ tale che $a \top a' = u = a' \top a$

Esempi:

$(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

$(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$

non gruppo:

$(\mathbb{N}, +)$ $(\mathbb{R}, \cdot)$

---

4) commutatività

$\forall a, b \in A$ $a \top b = b \top a$ gruppo commutativo o abeliano

Anello: $(A, \top, \perp)$

1) $(A, \top)$ gruppo abeliano
2) $(A, \perp)$ associativa
3) propr. distributiva di $\perp$ rispetto a $\top$

$\forall\, a, b, c \in A$

$$(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c)$$

$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c)$$

Se $\exists$ el. neutro di $(A, \perp)$, l'anello viene detto **unitario**

Se $(A, \perp)$ commutativo, l'anello viene detto <u>commutativo</u>

<u>Campo</u>: un anello $(A, \top, \perp)$ t.c. $(A - \{\text{el. neutro di } \top\}, \perp)$ sia un gruppo abeliano (cioè, ogni elemento di $(A - \{\text{el. neutro di } \top\})$ ha inverso)

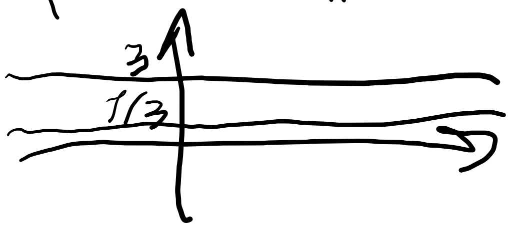
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$
quello unitario e commutativo

(non campi)

polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{R}$

El. invertibili di $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$: $1, -1$

" " $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$: costanti non nulle



Campi:

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Sp. vettoriale:

$(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$

$\mathbb{K}$ campo

V insieme $\neq \emptyset$

$(V, +)$ gruppo abeliano

$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ t.c.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\forall u, v \in V$

1) $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$

2) $(\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$

3) $\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$

4) $1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$

Esempi:

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, +, \cdot)$

n-pla di elementi di $\mathbb{R}$ / $\mathbb{K}$:

un'applicazione da $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ad $\mathbb{R}$

Esempio: una 3-pla

$$1 \longmapsto \sqrt{2}$$
$$2 \longmapsto \pi$$
$$3 \longmapsto \sqrt{2}$$

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\sqrt{2}}, \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{\pi}, \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{\sqrt{2}})$$

Somma di n-ple:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

Prodotto per scalare:

$$\alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) := (\alpha \cdot a_1, \dots, \alpha \cdot a_n)$$

Es.: $(1,2,3) + (4,5,6) = (1+4, 2+5, 3+6) =$

$= (5, 7, 9)$

$$3 \cdot (1,2,3) = (3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3) = (3, 6, 9)$$

Matrice di tipo m, n ad elementi in $\mathbb{R}$:
un'applicazione da $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ a $\mathbb{R}$

Esempio: un

Somma di matrici di tipo m, n:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (a_1^1 + b_1^1) & \cdots & (a_n^1 + b_n^1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_1^m + b_1^m) & \cdots & (a_n^m + b_n^m) \end{pmatrix}$$

Prodotto per scalare:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (\alpha \cdot a_1^1) & \cdots & (\alpha \cdot a_n^1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha \cdot a_1^m) & \cdots & (\alpha \cdot a_n^m) \end{pmatrix}$$

Esempi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+4) & (0+0) & (5-5) \\ (3+1) & (-1+1) & (2+1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 1) & (2 \cdot 0) & (2 \cdot 5) \\ (2 \cdot 3) & (2 \cdot (-1)) & (2 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ +,\ \cdot \right)$$

$\mathbb{K}$

ins. delle matrici di tipo m,n su $\mathbb{R}$

somma di matrici

prodotto matrice per scalare

è uno sp. vettoriale

Prodotto riga per colonna

$$\cdot : \mathcal{M}_{m,n} \times \mathcal{M}_{n,p} \longrightarrow \mathcal{M}_{m,p}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_p^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1^n & \cdots & b_p^n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_p^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^m & \cdots & c_p^m \end{pmatrix}$$

$$c_{s \in \mathbb{N}_p}^{r \in \mathbb{N}_m} := \sum_{t=1}^{n} a_t^r \cdot b_s^t$$

Matrice quadrata di ordine n:

matrice di tipo n, n

$$M_n = M_{n,n}$$

$(M_{n}, +, \cdot)$

prodotto riga per colonna

$M_{n,n} \times M_{n,n} \longrightarrow M_{n,n}$

è un anello unitario non commutativo (per $n \neq 1$)

el. neutro per $\cdot$: $\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta^i_j)$

$$\delta^i_j := \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot0 + 3\cdot0 & 1\cdot0 + 2\cdot1 + 3\cdot0 & = \\ - & — & — \quad — \\ — & — & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 \\ 4\cdot 2 + 5\cdot(-1) + 6\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×1 $\qquad$ 2×1

Quali sono gli elementi invertibili di $(M_n, +, \cdot)$?

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} = \left(a^i_j\right)_{i,j \in \mathbb{N}_n}$$

$$\det A = |A| := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\operatorname{sign} \sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdots a^n_{\sigma(n)}$$

$\mathcal{S}_n$: insieme delle permutazioni (= biiezioni in sé) dell'insieme $\mathbb{N}_n$

$\operatorname{sign}\sigma = (-1)^{\text{n° di coppie in inversione di } \sigma}$

(i,j) è in inversione se $i<j$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$

Es.: $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \qquad \det A = (-1)^0 a^1_1 a^2_2 + (-1)^1 a^1_2 a^2_1 =$$

$$= a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1$$

$n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{matrix} \qquad \det A = + a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2$$

$$- a^1_3 a^2_2 a^3_1 - a^1_1 a^2_3 a^3_2 - a^1_2 a^2_1 a^3_3$$

TEOR - $A \in M_n$ è invertibile

$$\Updownarrow$$

$$\det A \neq 0$$

TEOR - Se $A \in M_n$ e ottengo $B \in M_n$ scambiando due righe di A, allora $\det B = -\det A$

TEOR - Se $A \in M_n$ e ottengo $B \in M_n$ sommando a una riga di A una combinazione lineare di altre righe di A, allora $\det B = \det A$

Trasposta di una matrice $A = (a^i_j)_{\substack{i \in \mathbb{N}_m \\ j \in \mathbb{N}_n}} \in \mathcal{M}_{m,n}$

è la matrice ${}^tA = (b^r_s)_{\substack{r \in \mathbb{N}_n \\ s \in \mathbb{N}_m}} \in \mathcal{M}_{n,m}$

dove

$$b^r_s := a^s_r$$

TEOR - Se $A \in \mathcal{M}_n$, $\det({}^tA) = \det(A)$