

In  $\mathbb{R}^5$  siano  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  ~~$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$~~ . Si scrivano  
 forma parametrica e cartesiana del sottospazio  $U = \mathcal{L}(\{u, v, \cancel{w}\})$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rk } A = 2$$

$\{u, v\}$  è una  
 base di  $U$

$$|O_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha + 2\beta \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \alpha - 2\beta \end{cases}$$

$\Rightarrow$  pr. par.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & -1 & 2 \\ x_4 & 0 & 1 \\ x_5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{cases} |O_1| = 0 \\ |O_2| = 0 \\ |O_3| = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_2 + x_4 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_5 = 0$$

Rapp. cart.

Sp.  $V, W$   
 $v_1, \dots, v_h \in V$   $T: V \rightarrow W$  lineare

$$w_1 = T(v_1), \dots, w_h = T(v_h)$$

PROP - Se  $v_1, \dots, v_h$  sono lin. dip., allora  $w_1, \dots, w_h$  sono lin. dip.

PROP - Se  $w_1, \dots, w_h$  sono lin. indip., allora  $v_1, \dots, v_h$  sono lin. indip.

PROP - Sia  $T$  lineare e iniettiva. Allora

PROP - Se  $v_1, \dots, v_h$  sono lin. indip. allora  $w_1, \dots, w_h$  sono lin. indip.

PROP - Se  $T$  è un isomorfismo

$\{v_1, \dots, v_h\}$  base di  $V \iff \{w_1, \dots, w_h\}$  base di  $W$

TEOR (fondamentale delle trasf. lin.)

Dati sp. Vett.  $V, W$ , data una base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$ ,  
data una qualsiasi applicazione  $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow W$ ,  
esiste esattamente una trasf. lin.  $T: V \rightarrow W$   
tale che  $T|_{\mathcal{B}} = \varphi$ .

TEOR

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

$\Phi_B$  è un isomorfismo

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$$

↑  
componenti di  $v$  rispetto a  $B$

$$v \equiv_B (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$v \equiv_B (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  è come dire  $\Phi(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

TEOR -  $\dim V = n$   $\dim W = m$   
 $B = (v_1, \dots, v_n)$  base di  $V$ ;  $B' = (w_1, \dots, w_m)$  base di  $W$

$T: V \rightarrow W$  lineare;

$$T(v_1) \equiv_{B'} \begin{pmatrix} a_{11}' \\ \vdots \\ a_{m1}' \end{pmatrix}, \dots, T(v_n) \equiv_{B'} \begin{pmatrix} a_{1n}' \\ \vdots \\ a_{mn}' \end{pmatrix}$$

ha come componenti  
rispetto a  $B'$

$$\text{Sia } A = \begin{pmatrix} a_{11}' & \dots & a_{1n}' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}' & \dots & a_{mn}' \end{pmatrix}; \text{ sia } v \equiv_B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \text{ sia } T(v) \equiv_{B'} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = M_{B, B'}(T)$$

TEOR -  $\dim V = n, \dim W = m, \dim U = p$

$T: V \rightarrow W, S: W \rightarrow U$  lineari

$B = (v_1, \dots, v_n)$  base di  $V$

$B' = (w_1, \dots, w_m)$  " "  $W$

$B'' = (u_1, \dots, u_p)$  " "  $U$

$A = M_{B, B'}(T) \in M_{m, n}$   $C = M_{B'', B'}(S) \in M_{p, m}$

Allora  $S \circ T: V \rightarrow U$

$$M_{B, B''}(S \circ T) = C \cdot A$$

Reperimento di  $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T)$ : caso 1  
 Ho la trasf. lin.  $T: V \rightarrow W$  e posso ottenere  $T(v_1), \dots, T(v_n)$  e scomporli rispetto a  $\mathcal{B}'$ . Metta in colonna.

Esempio  $V = \{ \text{polin. di gr.} \leq 5 \}$   $W = \{ \text{polin. di gr.} \leq 4 \}$

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4, x^5)$$

$$\mathcal{B}' = (1, x, x^2, x^3, x^4)$$

$$T: V \rightarrow W$$

$$p(x) \mapsto 2p'(x) - 3p''(x)$$

$$T(1) = 0$$

$$T(x) = 2$$

$$T(x^2) = 4x - 6$$

$$T(x^3) = 6x^2 - 18x$$

$$T(x^4) = 8x^3 - 36x^2$$

$$T(x^5) = 10x^4 - 60x^3$$

$$\equiv_{\mathcal{B}'} (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\equiv_{\mathcal{B}'} (2, 0, 0, 0, 0)$$

$$\equiv_{\mathcal{B}'} (-6, 4, 0, 0, 0)$$

$$\equiv_{\mathcal{B}'} (0, -18, 6, 0, 0)$$

$$\equiv_{\mathcal{B}'} (0, 0, -36, 8, 0)$$

$$\equiv_{\mathcal{B}'} (0, 0, 0, -60, 10)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T)$$

Trovare  $T(5x - 7x^4)$  risp. a  $\mathcal{B}'$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ci dà i coefficienti del trasformato

Reperimento: caso 2  
 Non ho  $T$ , ma ho i trasformati dei vettori di  $\mathcal{B}$ .

$V = W = \{ \text{segmenti del piano con un'estremità in } N_0 \}$

$T: V \rightarrow V$   
 $v \mapsto v$  ruotato di  $30^\circ$

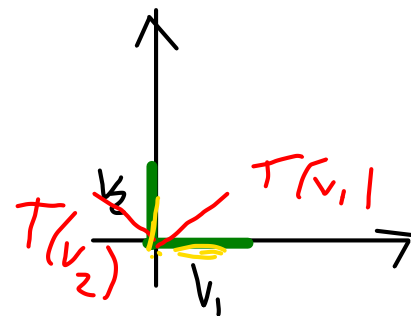
$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} = (v_1, v_2)$$

$$T(v_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 \equiv \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$T(v_2) = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 \equiv \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Altro esempio  
 del caso 1

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T)$$



Esempio del caso 2

$$V = \mathbb{R}^2 \quad W = \mathbb{R}^3 \quad B = ((1,0), (0,1)) \quad B' = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trovare  $A = M_{B,B'}(T)$ , dove

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è tale che  $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \{v_1, v_2\} \text{ è base di } \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$X \qquad Y$

$$A \cdot X \cdot X^{-1} = Y \cdot X^{-1}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$$

Sp. affine: una terna  $(\vec{A}, A, \pi)$

$\pi: A \times A \rightarrow \vec{A}$   
 che rispetta  
 certi assiomi

Sp. (Vettoriale)  
 dei vettori  
 liberi

insieme  
 dei punti

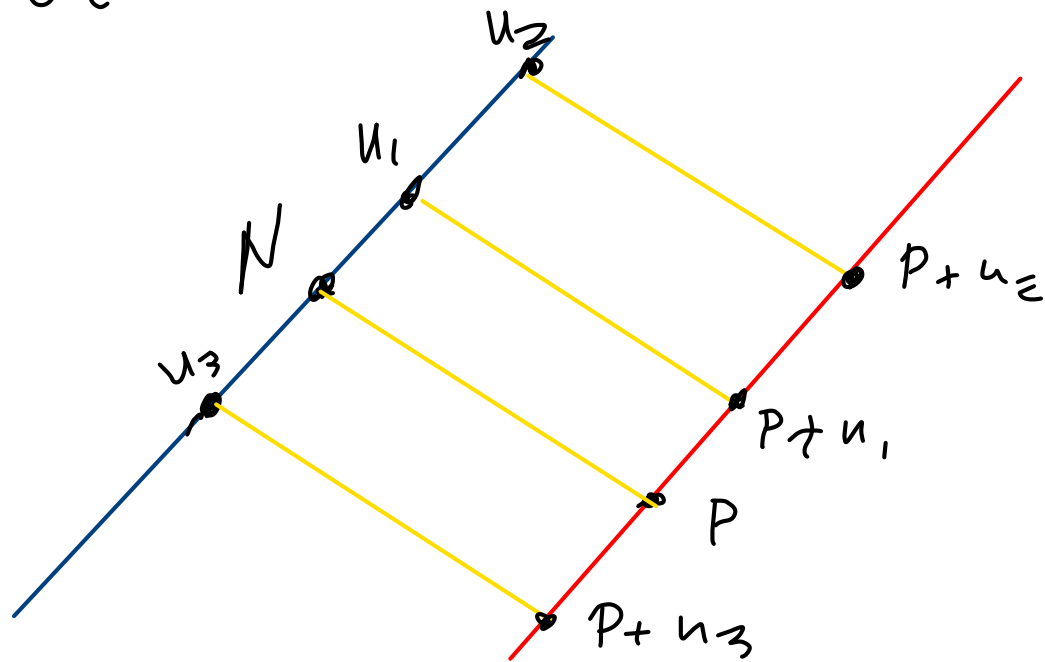
per noi:  
 $(V, V, \tau)$

$\tau: V \times V \rightarrow V$   
 $(u, v) \mapsto v - u =: \overrightarrow{uv}$

---

DEF - I punti  $P_0, P_1, \dots, P_h$  si dicono affinemente  
dipendenti se i vettori liberi  $\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_h}$  sono  
 linearmente dipendenti.

Sottospazio affine: un insieme di punti  $A'$  che sia traslato di un sottospazio vettoriale, che verrà detto giacitura di  $A'$ ,  $\vec{A}$ .  
Traslato: ottenuto dalla somma di un punto ( $\in A'$ ) con tutti gli elementi di  $\vec{A}$ .



I sottospazi affini  $A', A''$  si dicono paralleli se

$$\overrightarrow{A'} \subseteq \overrightarrow{A''} \text{ e viceversa}$$

---

$$\dim A' := \dim \overrightarrow{A'}$$

---

Anche per i sottospazi affini si possono dare rappresentazioni cartesiana e parametrica.

---

Spazio affine  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \tau)$

Dati in  $\mathbb{R}^n$  i punti  $P_0, P_1, \dots, P_k$ , voglio trovare forme parametrica e cartesiana del sottospazio affine generato da  $P_0, P_1, \dots, P_k$  ("passante per"  $P_0, \dots$ ), cioè il sottospazio di minima dimensione che li contiene.

---

Eseguendo differenze, calcolo i vettori liberi  $\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_k}$ , poi procedo come visto per i sottospazi vettoriali (con una piccola aggiunta nel caso parametrico).

Esempio -  $\mathbb{R}^5$   $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{P_0 P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$   $\overrightarrow{P_0 P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$   $\overrightarrow{P_0 P_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$rk = 2$

$|O_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$|O_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$|O_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0} X = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \\ x_4 \\ x_5 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (x_1 - 1) & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 \\ (x_3 - 1) & 1 & 1 \\ x_4 & -1 & -2 \\ (x_5 - 1) & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} P_0'' \\ P_0'' \\ P_0'' \end{matrix}$$

$$\begin{cases} |O_1| = 0 \\ |O_2| = 0 \\ |O_3| = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} (x_1 - 1) & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 \\ (x_3 - 1) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} (x_1 - 1) & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 \\ x_4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} (x_1 - 1) & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 \\ (x_5 - 1) & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 - 1) - x_2 - (x_3 - 1) = 0 \\ -(x_1 - 1) + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - (x_5 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$x_2 - (x_5 - 1) = 0$$

$$\vec{A}: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

CA

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_5 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (x_1-1) & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 \\ (x_3-1) & 1 & 1 \\ x_4 & -1 & -2 \\ (x_5-1) & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

salto questo passaggio e scrivo subito

cl

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cl