

$T: V \rightarrow W$ linear $\dim V = n$ $\dim W = m$
 PROP - $\dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T) = n$
 PROP - T injectiva $\Leftrightarrow \text{Ker } T = \{\vec{0}_V\} \Leftrightarrow \dim \text{Ker } T = 0$
 PROP - Sia $A = M_{\beta, \beta'}(T)$;
 $\dim \text{Im } T = \text{rk } A$
 $\dim \text{Ker } T = n - \text{rk } A$
 T suriettiva $\Leftrightarrow \text{rk } A = m$
 T iniettiva $\Leftrightarrow \text{rk } A = n$

Oss. - La rappresentazione cartesiana di un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^n$ può essere vista come rappresentazione di V come Ker di un'opportuna tr. lin.
La rappresentazione parametrica può essere vista come rappresentazione di V come Im di una (alt.) tr. lin.

Come passare da param. a cartesiana?
Le colonne della matrice dei coefficienti dei parametri costituiscono un sistema di generatori; applico il procedimento per la costruzione della rapp. cart.

Come passare da cartesiana a parametrica?
Risolvo il sistema.

$$U \subseteq \mathbb{R}^5$$

$$V: \begin{cases} x - 3z + t + u = 0 \\ x + y - t + 2u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$M(T)$
basist.
 $\text{rk} = 2$

$$T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$U = \text{Ker } T$$

$$\dim U = 5 - 2 = 3$$

$$\begin{cases} x - 3z + t + u = 0 \\ y + 3z - 2t + u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\alpha - \beta - \gamma \\ y = -3\alpha + 2\beta - \gamma \\ z = \alpha \\ t = \beta \\ u = \gamma \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$M(S)$
basist.

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^5 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$

$$U = \text{Im } S = \text{Ker } T$$

$$S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$$

$$U = \text{Im } S$$

Forma bilineare su V : $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$

t. c. $\forall v, v', v'' \in V$
 $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$\varphi(v + v', v'') = \varphi(v, v'') + \varphi(v', v'')$$

$$\varphi(v, v' + v'') = \varphi(v, v') + \varphi(v, v'')$$

$$\varphi(\alpha v, v') = \alpha \varphi(v, v') = \varphi(v, \alpha v')$$

φ è detta simmetrica se $\forall v, v' \in V$

$$\varphi(v, v') = \varphi(v', v).$$

Data una forma bilineare simmetrica $\varphi: V \times V \rightarrow K$,
l'applicazione $q: V \rightarrow K$ viene detta forma
 $v \mapsto \varphi(v, v)$

quadratica.

q è detta associata a φ ; φ viene detta forma polare di q

Sia $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica. Essa viene detta
definita positiva se $\forall v \in V - \{0_V\} \quad q(v) > 0$
negativa < 0

Anche la sua forma polare viene detta definita positiva
negativa

Prodotto scalare su V : ogni forma bilineare simmetrica definita positiva su V .

Es: Su $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare naturale:

$$\varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$
$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle$$

Es: Su $V = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$
$$f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Spazio vettoriale euclideo : $(V, \langle, \rangle)$ dove
 V è uno sp. vett. reale e $\langle, \rangle$ è un prodotto scalare su V .
Dati $v, v' \in V$, diciamo che v è ortogonale a v' se $\langle v, v' \rangle = 0$.
Norma euclidea su uno sp. vett. euclideo $(V, \langle, \rangle)$ è
l'applicazione $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$
$$v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Versore: ogni vettore di norma = 1
Insieme ortogonale: ogni insieme di vettori ortogonali
a due a due
Insieme ortonormale: ogni insieme di Versori
ortogonali a due a due

Dati sp. vett. euclidei $(V, \langle, \rangle)$, $(W, \langle, \rangle)$
la transf. lin. $T: V \rightarrow W$ è detta ortogonale se
 $\forall v, v' \in V \quad \langle T(v), T(v') \rangle = \langle v, v' \rangle$

La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ viene detta ortogonale
se ${}^t A = A^{-1}$

PROP - siano V, W come sopra, siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi
ortonormali di V, W rispettivamente. Allora

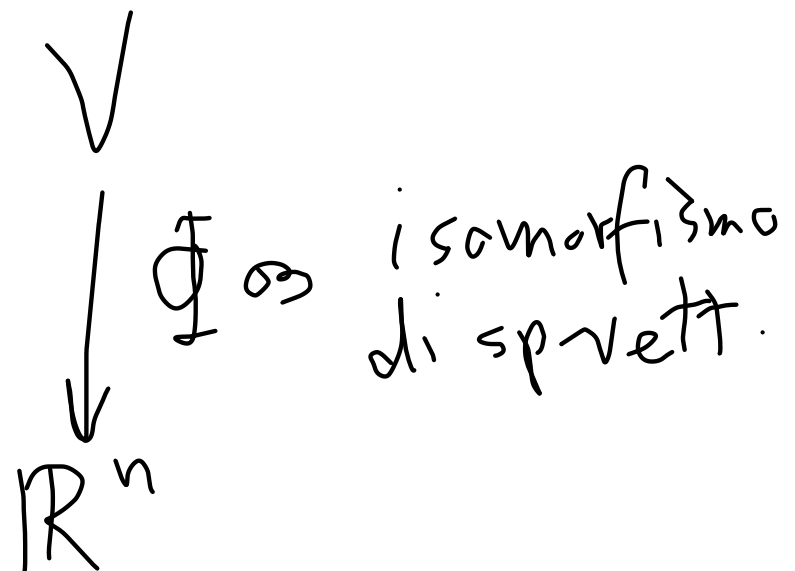
$T: V \rightarrow W$ è ortogonale $\Leftrightarrow A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(T)$ è ortogonale

PROP - Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale allora le sue colonne formano
una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{nat.}})$.

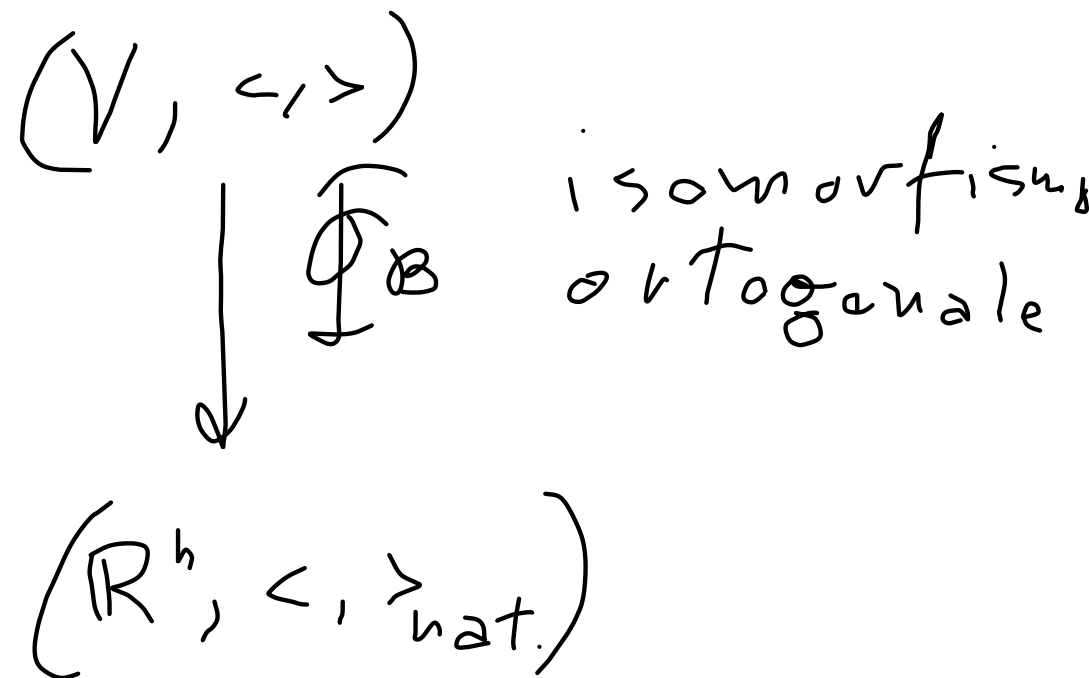
PROP - Se mette in colonna le componenti dei vettori
di una base B ortonormale, rispetto a una base
 B ortonormale, ottengo una matrice ortogonale

TEOR - $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ B base ortonormale di V
 $\downarrow$ Φ_B
 $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{nat.}})$ $\leftarrow$ è ortogonale

V sp. vett. (qualsiasi)
 B una sua base ordinata (qualsiasi)



$(V, \langle, \rangle)$ sp. vett. eucl.
 B una sua base ordinata
 ortogonale



S.p. vett. eucl. $(V, \langle, \rangle)$ di $\dim = n$ ortogonale di X
 Sia $X \neq \emptyset, X \subset V$; indico con $\perp X$ l'insieme $\{v' \in V \mid \forall v \in X \langle v, v' \rangle = 0\}$

PROP- $\perp X$ è sempre un sotto spazio vett.

PROP- $\perp(\perp X) = \overline{X}$

PROP- $\dim U = k \Rightarrow \dim \perp U = n - k$
↑
sottospazio

Se U è sottospazio
 $\perp U$ è detta
complemento
ortogonale di U

PROP- Rispetto a una base ortonormale, sia

$$U = \begin{cases} a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^h x_1 + \dots + a_n^h x_n = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{rapp. cart. minima} \\ \text{(dove } h = \text{rk}(\text{matrice incompleta}) = n - \dim U) \end{matrix}$$

Allora gli h vettori che, rispetto alla stessa base, hanno compun.
 $(a_1^1 \dots a_n^1)$ formano una base di $\perp U$

$$(a_1^h \dots a_n^h)$$

↑
non necessariamente
ortogonale

Lo spazio affine
Riferimento affine: ogni coppia $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$

un punto di $\mathcal{A}$ una base di $\vec{\mathcal{A}}$
 (che verrà detto "origine")

Coordinate affini di un punto

$P \in \mathcal{A}$ rispetto ad $\mathcal{R}$:

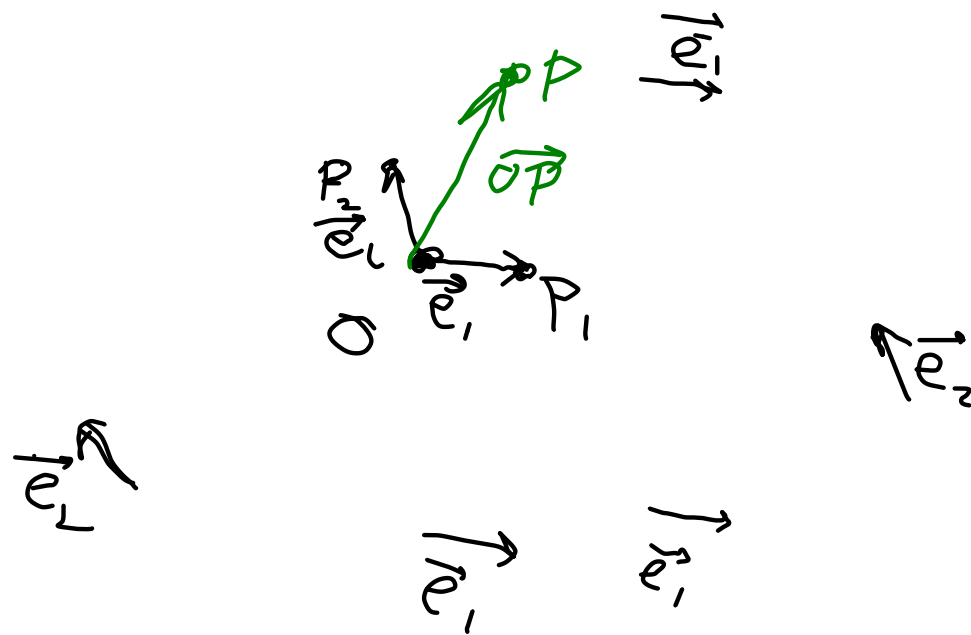
le componenti di $\vec{OP}$ rispetto a $\vec{\mathcal{B}}$

$$\vec{\mathcal{B}} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

coordinate affini

$$P = \mathcal{R}(x, y) \quad (\Rightarrow) \vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

$$\vec{OP} \stackrel{\parallel}{=}_{\vec{\mathcal{B}}} (x, y)$$



Spazio euclideo : coppia $(U, \langle, \rangle)$, dove $\langle, \rangle$ è un prod. scal su $\vec{U}$
Riferimento cartesiano (ortogonale, monometrico) : ogni coppia

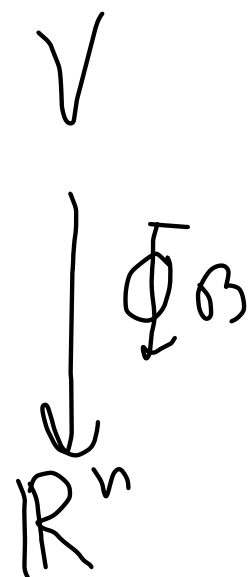
$$Q = (o, \vec{B})$$

un punto

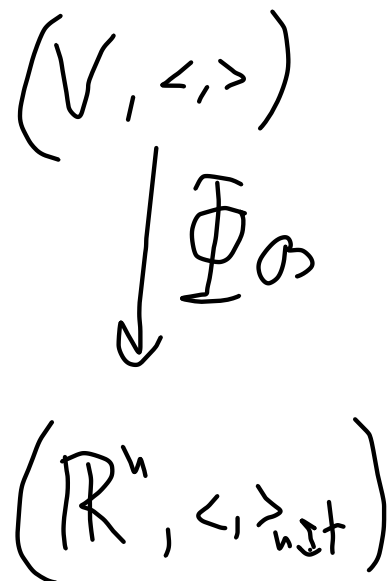
base ortogonale di $\vec{U}$

$$P \equiv_Q (x, y) \leftarrow \text{coordinate cartesiane}$$

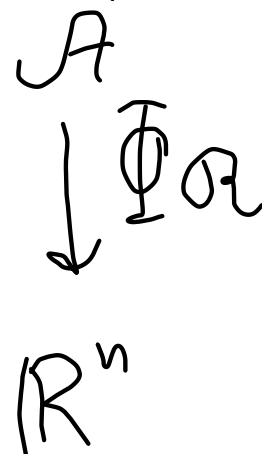
V sp. vett.
 $\mathcal{B}$ base



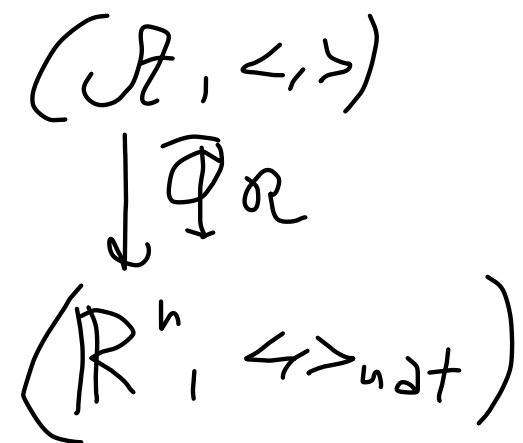
$(V, \langle, \rangle)$ sp. vett. eucl.
 $\mathcal{B}$ base ortonorm.



$\mathcal{A}$ sp. affine
 $\mathcal{R}$ riferimento affine



$(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ sp. eucl.
 $\mathcal{R}$ rif. cart.



$\Phi_{\mathcal{R}}(P)_{\mathcal{A}} = (x_1, \dots, x_n)$
 coordinate
 di P risp. ad $\mathcal{R}$

In uno sp. eucl $\mathcal{E} = (\mathcal{A}, \langle, \rangle)$

di $\dim = n$

due rette r, r' si dicono ortogonali se tutti i vettori liberi di $\vec{r}$ sono ortogonali a tutti i vettori liberi di $\vec{r}'$

Iperpiano (in uno spazio vettoriale, vett. eucl., affine, euclidea, proiettivo di $\dim = n$): sottospazio di $\dim = n-1$

Un iperpiano Π e una retta r si dicono ortogonali se $\vec{r}$ è il complementa ortogonale di $\vec{\Pi}$, $\vec{r} = \perp \vec{\Pi}$

Due iperpiani Π e Π' si dicono ortogonali se ogni retta ortogale a Π è ortogonale ad ogni retta ortogonale a Π' .

Rappresentazioni di rette:

Parametrica

$$r: \begin{cases} x_1 = l_1 \alpha + b_1 \\ \vdots \\ x_n = l_n \alpha + b_n \end{cases}$$

sono componenti di un vettore libero di $\vec{r}$
vengono detti coefficienti direttivi di r

PROP - I coefficienti direttivi di una retta sono determinati a meno di proporzionalità

