

Dati sp. proiett. $\mathcal{P} \in \mathcal{P}'$, siano $\bar{S} = (A_0, A_1, U)$, $\bar{S}' = (A'_0, A'_1, U')$ che, rispetto a fissati riferimenti S ed S' di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, hanno coordinate

$$A_0 \equiv (2, 1), A_1 \equiv (3, 2), U \equiv (0, -3),$$

$$A'_0 \equiv (1, 1), A'_1 \equiv (1, 2), U' \equiv (4, 7). \quad a) \text{ Verificare che } \bar{S}, \bar{S}' \text{ sono rifer.}$$

b) Trovare la matrice M che rappresenta, rispetto ad S ed S' , la proiettività $w: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ tale che
 $w(A_0) = A'_0, w(A_1) = A'_1, w(U) = U'.$

a) $\bar{S}$ (fatto). $\bar{S}'$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{array} \right) \left| \begin{array}{c} 4 \\ 7 \end{array} \right| \neq 0 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{array} \right| \neq 0 \quad \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{array} \right| \neq 0 \quad \checkmark$

b) Per Σ avevamo trovato la base $B = ((18, 9), (-18, -12))$
 Cerco una base B' normalizzata rispetto ad Σ' :

$$\gamma(1,1) + \delta(1,2) = (4,7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma + \delta = 4 \\ \gamma + 2\delta = 7 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma + \delta = 4 \\ \delta = 3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma = 4 - 3 = 1 \\ \delta = 3 \end{array} \right.$$

$B' = ((1,1), (3,6))$. Cerco la transf. lin. (anzi: la simmetrica M)
 che trasforma B in B' .

$$M \cdot \begin{pmatrix} 18 & -18 \\ 9 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad |X| = -216 + 162 = -54 \quad X^{-1} = -\frac{1}{54} \begin{pmatrix} -12 & 18 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{54} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 18 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} = -\frac{1}{54} \begin{pmatrix} -39 & 72 \\ -66 & 126 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{54} \begin{pmatrix} -39 & 72 \\ -66 & 126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 24 \\ -22 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -13 & 24 \\ -22 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 24 \\ -22 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$$

$A_0 \qquad A_0' \qquad A_1 \qquad A_1'$

In uno spazio affine, dati punti A, B, C su uno stesso retto,
il loro rapporto semplice è $\frac{AB}{AC}$.

Le affinità conservano i rapporti semplici di terne collineari.

In un piano proiettivo, dati due punti distinti
esiste esattamente una retta che li contiene.

In un piano proiettivo, date due rette distinte
esiste esattamente un punto contenuto in esse.

In un piano affine, date due rette distinte
non può esistere alcun punto comune in esse. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x + 5y - 7 = 0 \\ 4x + 10y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 0 = -12 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rk } A = 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\neq \quad \text{rk } C = 2$$

$$\begin{cases} -7X_0 + 2X_1 + 5X_2 = 0 \\ -2X_0 + 4X_1 + 10X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det \neq 0 \quad \text{rk} = 2$$

$$(X_0, X_1, X_2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (0, 60, -24) \sim$$

$$\sim (0, 5, -2)$$