

1) Trovare il piano per $r: \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = -2 \end{cases}$ e $P \equiv (1, 2, 0)$

2) " " " " " " e // $s: \begin{cases} x = 5\alpha \\ y = -2\alpha + 1 \\ z = \alpha + 3 \end{cases}$

1) $r: \begin{cases} -X_0 + X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \\ 2X_0 + 2X_1 + X_2 + 3X_3 = 0 \end{cases}$ $P \equiv (1, 1, 2, 0)$

$$\lambda(-X_0 + X_1 - 2X_2 + X_3) + \mu(2X_0 + 2X_1 + X_2 + 3X_3) = 0$$

$$\lambda(-1 + 1 - 4 + 0) + \mu(2 + 2 + 2 + 0) = 0$$

2) $S_{on} \equiv (0, 5, -2, 1)$

$$\lambda(0 + 5 + 4 + 1) + \mu(0 + 10 - 2 + 3) = 0$$

Sia $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare

Sia $B = (e_1, \dots, e_n)$ base di V .

$A = (a_{ij})$ $a_{ij} := \varphi(e_i, e_j)$ matrice di Gram di φ risp. a B

PROP - Siano $u, v \in V$ $u \equiv_B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$ $v \equiv_B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y \end{pmatrix}$

Allora $\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}_{1 \times n} \cdot \begin{matrix} A \\ n \times n \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = t(x) \cdot A \cdot (y)$

PROP

$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è bilineare $\iff$ è o nulla o
 $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$
omogenea di 1° grado
nelle x_i e di 1° grado
nelle y_i

$$\mathbb{E} \subset \varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \longmapsto$$

$$\boxed{x_1 x_3} + x_2 y_1 + 5 x_3 y_2 \quad \text{NO}$$

$$\boxed{x_1} + x_2 y_1 + 5 x_3 y_2 \quad \text{NO}$$

B) base canonical

$$\varphi((1,0,0), (1,0,0))$$

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} \overset{y_1}{0} & \overset{y_2}{0} & \overset{y_3}{1} \\ \overset{x_1}{1} & 0 & 0 \\ \overset{x_2}{0} & 5 & 0 \\ \overset{x_3}{0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 y_3 + x_2 y_1 + 5 x_3 y_2)$$

$$x_1 y_3 + x_2 y_1 + \boxed{5 y_2^2} \quad \text{NO}$$

$$\varphi((0,0,1), (0,1,0))$$

Una forma bil. si dice simmetrica

se $\forall u, v \in V \quad q(u, v) = q(v, u)$

PROP - q simmetrica $\iff$ la sua matrice di Gram
è simmetrica

PROP - $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è quadratica
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto$

$\iff$
è nulla omogenea di 2° grado
nelle x_i

PROP - Ci sono infinite forme bilineari associate
alla stessa forma quadratica, di cui esattamente
una è simmetrica.

L'unica forma bil. simm. associata a una forma quadr.
viene detta la sua forma polare.

Matrice di Gram di una forma
quadratica e la matrice di Gram della sua forma polare

Es. - Forma quadratica associata alle bilineari

q
 q

$$x_1 y_3 + x_2 y_1 + 5 x_3 y_2$$
$$x_1 x_3 + x_2 x_1 + 5 x_3 x_2$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 5/2 \\ 1/2 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q: 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3 - x_3^2$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$T: V \rightarrow V$ endomorfismo (trasf. lin. da V a V) V sp. vett. reale
 $\lambda \in \mathbb{R}$ qualsiasi
 $U_\lambda := \{v \in V \mid T(v) = \lambda \cdot v\}$

U_λ è sempre un sottosp. vett. di V , ma quasi sempre è banale, cioè costituito dal solo vettore nullo di V .
 U_λ è detto autospazio di T se non è banale; in tal caso λ è detto autovalore di T ; gli elementi di U_λ vengono detti auto vettori di T relativi a λ .

In V fissiamo una base $\mathcal{B}$. A T viene allora associata una matrice $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T) \in M_n(\mathbb{R})$

λ sarà un autovalore e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ rappresenterà un autovettore

$$\Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\lambda I_n - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

In conclusione λ è un autovalore $\Leftrightarrow$ il sistema lineare omogeneo $(\lambda I_n - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ha soluzioni diverse dalla trivialità $\Leftrightarrow \text{rk}(\lambda I_n - A) < n \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$

TEOR - $\det(\lambda I_n - A)$ è un polinomio in λ , di grado n ,
 le cui radici sono tutti e soli gli autovalori di T .
 Data una tale radice λ , $U_\lambda: (I I_n - A) \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
 detto polinomio caratteristico di A

Es - $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (5x + 4y, 4x + 5y)$ $\mathcal{B}$ base canonica

$A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Cerco gli autovalori:

$\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -4 & \lambda - 5 \end{pmatrix}$ $\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - 5)^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 - 16 =$
 $= \lambda^2 - 10\lambda + 9 = (\lambda - 9)(\lambda - 1)$

$\lambda = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovalori

$U_9: \begin{pmatrix} (9-5) & -4 \\ -4 & (9-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases}$

$U_1: \begin{pmatrix} (1-5) & -4 \\ -4 & (1-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 4y = 0 \\ -4x - 4y = 0 \end{cases}$

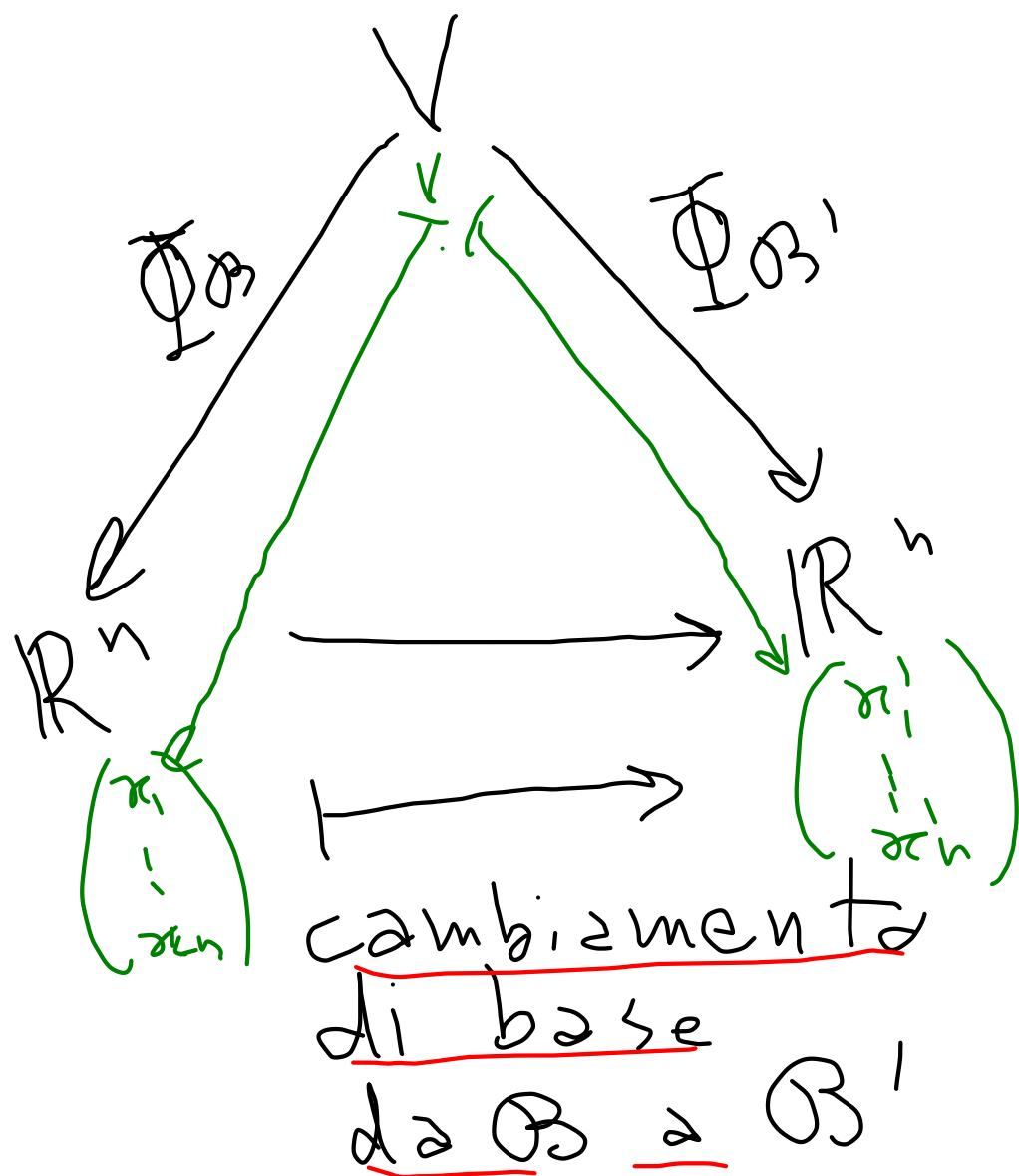
Multiplicità algebrica di un autovettore: la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

Multiplicità geometrica di un autovettore: la dimensione del suo autospazio.

PROP - $m_g(\lambda) = n - \text{rk}(\lambda I_n - A)$

PROP - Se λ è un autovettore di T , allora

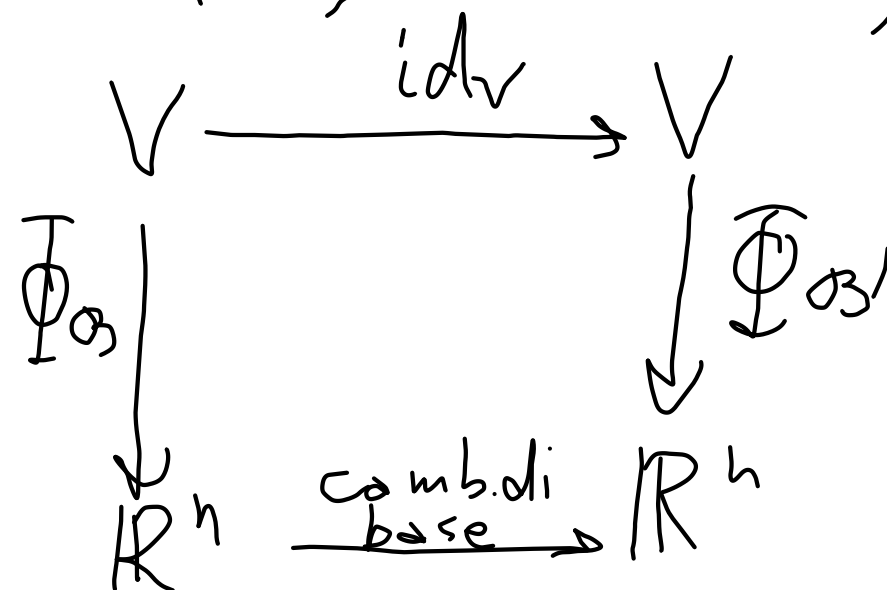
$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$



$$B = (e_1, \dots, e_n)$$

$$B' = (f_1, \dots, f_n)$$

$$v \equiv_B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad v \equiv_{B'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$



PROP- I cambiamenti di base
sono automorfismi di $\mathbb{R}^n$

P_{ROP} - La matrice che rappresenta
il cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ha come colonne
le n -uple di componenti, rispetto a $\mathcal{B}'$, dei vettori di $\mathcal{B}$.

P_{ROP} - La matrice che rappresenta il cambiamento di
base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è l'inversa della matrice precedente.
