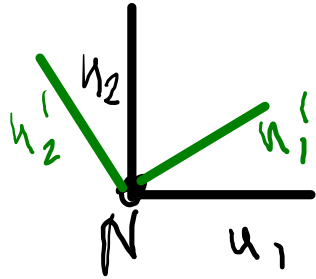


$$B = (u_1, u_2) \quad B^1 = (u'_1, u'_2)$$

Camb. di base da B^1 a B :

$$u'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2 = B \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$u'_2 = -\frac{1}{2} u_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} u_2 = B \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



$$F = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Camb. di base da B a B^1 :
matrice inversa $E = F^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Dato $A, A' \in M_n$ diciamo che
 A è simile ad A' se $\exists E \in M_n$ con $\det E \neq 0$ t.c.
$$A = E^{-1} \cdot A' \cdot E$$

TEOR - A simile ad A'

$\Downarrow$
 $\exists$ s.vett. V , un endomorfismo $T: V \rightarrow V$, basi
ordinate B, B' per cui $A = M_{B,B}(T)$, $A' = M_{B',B'}(T)$

$$\text{DIM} -$$

$$v \equiv_B(x)$$

$$\equiv_{B'}(x')$$

$$T(v) \equiv_B(y)$$

$$\equiv_{B'}(y')$$

$$(x') = E \cdot (x)$$

$$(y') = E' \cdot (y)$$

$$(x) = E^{-1} \cdot (x')$$

$$(y) = E^{-1} \cdot (y')$$

$$(y) = A \cdot (x)$$

$$(y') = A' \cdot (x')$$

$$\xrightarrow{E} E \cdot (y) = A' \cdot E \cdot (x)$$

$$(y) = E^{-1} \cdot A' \cdot E \cdot (x)$$

$A, A' \in M_n$ simmetriche
 Diciamo che A è congruente ad A' se
 $\exists E \in M_n$ con $\det E \neq 0$ t.c. $A = {}^t E \cdot A' \cdot E$

PROP- A, A' sono congruenti
 $\iff$

$\exists$ spett. V , forma quadratica $q: V \rightarrow \mathbb{R}$, basi ordinate
 B, B' tali che
 A è la matrice di Gram rispetto a B di q
 A' è " " " " " " " " " "

$$v \in V \quad v \equiv_{\mathcal{B}} (x) \\ \equiv_{\mathcal{B}'} (x')$$

$$(x') = E \cdot (x)$$

$$q(v) = t(x) \cdot A \cdot (x)$$

$$q(v) = t(x') \cdot A' \cdot (x')$$

$$q(v) = t(E \cdot (x)) \cdot A' \cdot (E \cdot (x))$$

$$q(v) = t(x) \cdot tE \cdot A' \cdot E \cdot (x)$$

Diciamo che $A \in M_n$ è diagonalizzabile per
similitudine se esiste una matrice diagonale
 D simile ad essa.

TEOR (Teor. spettrale) A è diagonalizzabile per similitudine

$\overset{\text{Spettrale}}{\exists}$ base di K^n formata da autovettori di A

$\Updownarrow$
la somma delle mult. geom. degli autovalori
di A è $= n$

GSS - D, in questo caso, sarà formata dagli autovalori di A disposti lungo la diagonale principale, ognuno ripetuto tante volte quante è la sua molteplicità geometrica (che in questo caso, risulta uguale alla sua molteplicità algebrica).

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{\text{utov.}} \quad \begin{matrix} \text{ma} & \text{mg} \\ 9 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$V_g: 4x - 4y = 0$$

$$V_l: 4x + 4y = 0$$

$$B_{V_g} = (1, 1)$$

$$B_{V_l} = (1, -1)$$

$$B_{\text{nat}} = ((1, 0), (0, 1))$$

$$B_{\text{sp}} = ((1, 1), (1, -1))$$

$$A = M_{B_{\text{nat}} B_{\text{nat}}} (T)$$

$$D = M_{B_{\text{sp}} B_{\text{sp}}} (T)$$

$$\begin{aligned} (y_n) &= E \cdot (y_s) \\ (x_n) &= E \cdot (x_s) \end{aligned}$$

Matr. del camb. di base da B_{sp} a B_{nat} :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E \cdot (y_s) = A \cdot E \cdot (x_s)$$

$$(y_s) = E^{-1} \cdot A \cdot E \cdot (x_s)$$

$$(y_n) = A \cdot (x_n)$$

$$(y_s) = D \cdot (x_s)$$

$$E^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TEOR -

Ogni matrice reale simmetrica è diagonalizzabile per similitudine

OSS - La matrice E tale che $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica risulta $A = E^{-1} \cdot D \cdot E$, con D diagonale, può essere scelta ortogonale (cioè $E^{-1} = {}^t E$). Perciò D è la diagonalizzata per similitudine di A , ma anche la sua diagonalizzata per congruenza.

In $\mathbb{C}$ abbiamo un Teorema analogo che permette di trovare un'opportuna base spettrale e una matrice di cambiamento di base E per cui, data $A \in M_n(\mathbb{C})$ simmetrica, $\exists D$ diagonale t.c.

$$A = {}^t E \cdot D \cdot E, \text{ con}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_k & \\ & & & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono autovalori $\neq 0$ di A

$$\text{Sia } F = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_k} & & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det F \neq 0 \quad {}^t F = F$$

$$C = {}^t F \cdot D \cdot F = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_k} & & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_k} & & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k & & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$k = rk A$
 Forma canonica
 per congruenza
 di A

TEOR -

$A, A' \in M_n(\mathbb{C})$ simmetriche

A congruente ad $A' \Leftrightarrow \text{rk } A = \text{rk } A'$

Posso fare la stessa trucca in $\mathbb{R}$?

Quasi. Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica,

senz'altro c'è E per cui

$$A = {}^t E \cdot D \cdot E \quad \text{con}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & \lambda_{r+1} \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_{r+s} \\ & & & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{matrix} \right\} > 0$
 $\left. \begin{matrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_{r+s} \end{matrix} \right\} < 0$

Allora invento

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & \\ 0 & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} \\ & & & \ddots \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

11

$$\left(\begin{array}{c} \sqrt{\lambda_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_r} \\ \sqrt{-\lambda_{r+1}} \\ \vdots \\ \sqrt{-\lambda_{r+s}} \\ \vdots \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_{r+s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \sqrt{\lambda_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_r} \\ \sqrt{-\lambda_{r+1}} \\ \vdots \\ \sqrt{-\lambda_{r+s}} \\ \vdots \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ -\lambda_{r+1} \\ \vdots \\ -\lambda_{r+s} \\ \vdots \end{array} \right)$$

Forma
canonica
per
congruenza
di A

Segnatura di una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica, e di ogni forma quadratica di cui essa sia matrice di Gram:

$\sigma = (\sigma_+, \sigma_-)$, dove σ_+ è la somma delle molteplicità (algebriche = geometriche) degli autovalori positivi di A

σ_- idem, per gli autovalori negativi

PROP - La forma canonica per congruenza di A
ha tanti $+$ quante σ_+ , tanti $-$ quante σ_- .

TEOR - $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ simmetriche

A congruente ad A' $\Leftrightarrow \sigma(A) = \sigma(A')$

TEOR (Horriot - Cartesio) semplificato.

Sia $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ un polinomio a coefficienti reali, con $a_0 \neq 0$ e tale che non ci siano radici complesse a parte immaginaria non nulla. Sia $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ la successione finita dei coefficienti. Se ci sono coefficienti nulli, assegniamo arbitrariamente un segno $+$ o $-$. Detta permanenza ogni coppia a_i, a_{i+1} dello stesso segno, variazione ogni coppia a_i, a_{i+1} di segni opposti.

la somma delle molteplicità delle radici > 0 = n. di variazioni.
" " " " " " " < 0 = n. di permanenze.

Es.: il seguente polinomio è
il polinomio caratteristico di una certa $A \in M_5(\mathbb{R})$,
simmetrica:

$$-4143 - 1407t + 775t^2 + 5t^3 - 19t^4 + t^5$$

Forma can. per
congruenza di A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Una forma quadratica $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ è detta
definita positiva se, $\forall v \in V - \{0\}$ $q(v) > 0$
negativa $q(v) < 0$

PROP- Se q è definita positiva, allora
negativa

$$\sigma(q) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

COR - $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica

$\Rightarrow$ è definita positiva $\Leftrightarrow$ il suo polinomio caratteristico ha termine noto $\neq 0$ e tutte variazioni permanenze

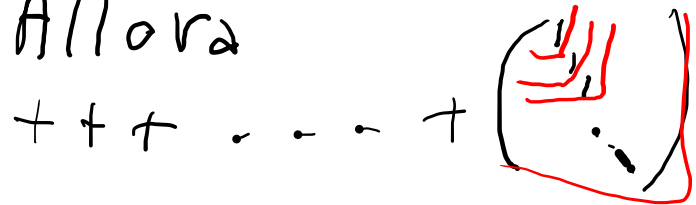
Criterio di Sylvester

$A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica.

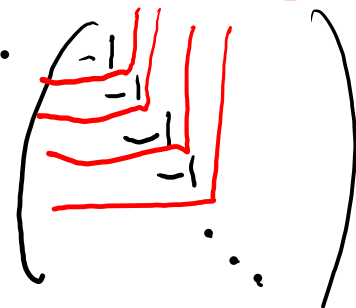
Minore principale: ogni minore ottenuta intersecando righe e colonne degli stessi indici

TEOR - Sia $M_1, M_2, \dots, M_n (= A)$ una successione di minori principali uno contenuto nell'altro. Allora

A è def. pos. $\Leftrightarrow \forall i \ |M_i| > 0$



A è def. neg. $\Leftrightarrow \forall i \ (-1)^i \cdot |M_i| > 0$



indefinita (cioè né def. pos. né def. neg.) ogni altra successione di segni

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M_1| = 1 > 0$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -23 < 0$$

$$|M_3|$$

+

- IND.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M_1| = 5 > 0$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 > 0$$

$$|M_3| = 3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 27 > 0$$

+

+

+

DEF. POS

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$