

$\mathbb{P}^n$
 $P = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \in W[f] \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\bar{x}_0 \ \bar{x}_1 \ \dots \ \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = (\bar{x}_0 \ \dots \ \bar{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow P \in I_m[f]$

$$P \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W[f] \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sia $Q \equiv \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ qualsiasi

$$(y_0 \dots y_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (y_0 \dots y_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ogni } Q \in \mathcal{P}_n \text{ coniugata a } P$$

$P \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \notin W$. Quali sono i punti coniugati
 $\rightarrow P$? $X \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$(x_0 \dots x_n) A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$b_0 x_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0$$

$\uparrow$ non tutti nulli

iperpiana

$$\begin{array}{c}
 {}^t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{y}) \\
 \underbrace{1 \times (n+1) \quad (n+1) \times (n+1) \quad (n+1) \times 1}_{1 \times 1}
 \end{array}
 = {}^t \left({}^t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{y}) \right) =$$

$$= {}^t(\bar{y}) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symmetric}}}{A} \cdot {}^t({}^t(\bar{x})) = {}^t(\bar{y}) \cdot A \cdot (\bar{x})$$

$$P \equiv (\bar{x}), Q \equiv (\bar{y})$$

$P \in \mathcal{Z}(Q) \iff$ le coordinate $(\bar{x})$ soddisfanno l'eq di $\mathcal{Z}(Q)$:

$${}^t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{y}) = 0$$

$$\iff {}^t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{y}) = 0$$

$$\iff {}^t(\bar{y}) \cdot A \cdot (\bar{x}) = 0$$

$\iff$ le coordinate $(\bar{y})$ soddisfanno l'eq di $\mathcal{Z}(P)$:

$${}^t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{x}) = 0$$

$$\iff Q \in \mathcal{Z}(P)$$

$$P \equiv \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \in W[f] \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sia $Q \equiv \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}$ qualsiasi
non $\in W[f]$

$$\tau(Q): (\bar{x}_0 \dots \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P \in \tau(Q) \quad (\bar{x}_0 \dots \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\bar{y}_0 \dots \bar{y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = (\bar{y}_0 \dots \bar{y}_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

S/

$$P \in \mathcal{P}_n \text{ -- } W[f]$$

$P \in \mathcal{Z}(P) \iff$ le coordinate $(\bar{x})$ soddisfanno le eq. di $\mathcal{Z}(P)$.

$$(x_0 \dots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (\bar{x}_0 \dots \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff P \in \mathcal{I}_m[f]$$

$$x = \frac{X_1}{X_0} \quad y = \frac{X_2}{X_0}$$

$$5x + 6y - 3 = 0$$

$$5 \frac{X_1}{X_0} + 6 \frac{X_2}{X_0} - 3 = 0 \quad \cdot X_0$$

$$5X_1 + 6X_2 - 3X_0 = 0$$

$$x^2 - 3y^2 + 6x - 5 = 0$$

$$\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2 - 3\left(\frac{X_2}{X_0}\right)^2 + 6\frac{X_1}{X_0} - 5 = 0 \quad \cdot X_0^2$$

$$X_1^2 - 3X_2^2 + 6X_1X_0 - 5X_0^2 = 0$$

$$P = \begin{pmatrix} 2, 4 \\ 1, 2, 4 \end{pmatrix} \quad \mathcal{C}(P): (1 \ 2 \ 4) A \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \ 5 \ -12) \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$X_0 + 5X_1 - 12X_2 = 0$$

$$\mathcal{C}(P) = 1 + 5x - 12y = 0$$

Trovare, rispetto alla stessa conica, il polo della retta $r: x - y + z = 0$

Prendo 2 punti su r : $Q \equiv (0, 2)$ $R \equiv (-2, 0)$
 $(1, 0, 2)$ $(1, -2, 0)$

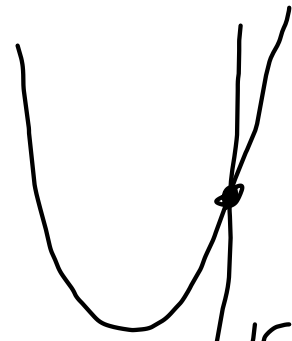
Ne calcolo le polari:

$$\begin{aligned} (1, 0, 2) \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= 0 & 2(Q) \begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ (1, -2, 0) \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= 0 & 2(R) \begin{pmatrix} -11 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{cases} -5X_0 + 3X_1 - 6X_2 = 0 \\ -11X_0 + X_1 = 0 \end{cases} &= 0 & \left(\begin{array}{c|c|c} |3 & -6| & |-5 & -6| & |-5 & 3| \\ |1 & 0| & |-11 & 0| & |-11 & 1| \end{array} \right) \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Il polo di r ha coord. affini $\begin{pmatrix} 6 \\ 66 \\ 28 \end{pmatrix}$ $\left(\frac{66}{6}, \frac{28}{6} \right)$

Interseco la parabola $y = x^2$ con la retta
 $r: x = 5$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 25$$



$$\begin{aligned} y - x^2 &= 0 \\ \frac{x_2}{x_0} - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 &= 0 \cdot x_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 5 &= 0 \\ \frac{x_1}{x_0} - 5 &= 0 \cdot x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_2 x_0 = x_1^2 \\ x_1 = 5 x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 x_0 = 25 x_0^2 \\ x_1 = 5 x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 (x_2 - 25 x_0) = 0 \\ x_1 = 5 x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 5 x_0 = 0 \end{cases} \quad (0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} x_2 = 25 x_0 \\ x_1 = 5 x_0 \end{cases} \quad (1, 5, 25)$$

Problema: data un'iperquadrica $[f]$ con discriminante A , dati punti $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathbb{P}^n$, trovare l'intersezione di $\text{Im}[f]$ con la retta $\bar{X}\bar{Y}$.

$\bar{X} \equiv (\bar{X}) = \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix}$
 $\bar{Y} \equiv (\bar{Y}) = \begin{pmatrix} \bar{Y}_0 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix}$
 Il generico punto della retta $\bar{X}\bar{Y}$ ha coordinate

$$(\bar{Z}) = \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \vdots \\ \bar{Z}_n \end{pmatrix} = \lambda(\bar{X}) + \mu(\bar{Y})$$
 con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

Sostituisco questa espressione del generico punto della retta nell'equazione di $\text{Im}[f]$:

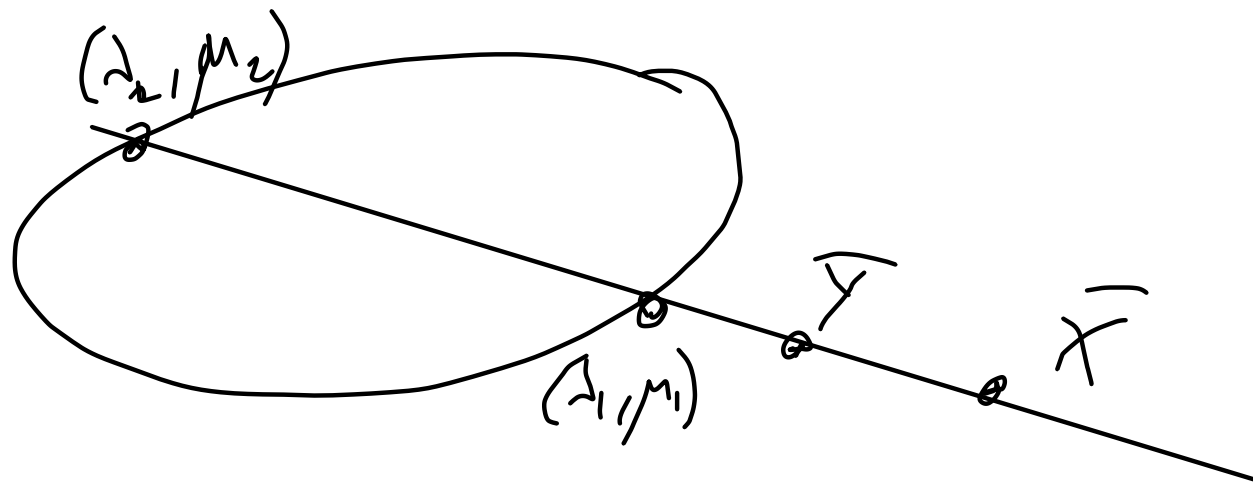
$$t(\bar{Z}), A - (\bar{Z}) = 0$$

$$t(\lambda(\bar{x}) + \mu(\bar{y})) \cdot A \cdot (\lambda(\bar{x}) + \mu(\bar{y})) = 0$$

$$t(\lambda(\bar{x})) \cdot A \cdot (\lambda(\bar{x}) + \mu(\bar{y})) + t(\mu(\bar{y})) \cdot A \cdot (\lambda(\bar{x}) + \mu(\bar{y})) = 0$$

$$\lambda^t(\bar{x}) \cdot A \cdot \lambda(\bar{x}) + \lambda^t(\bar{x}) \cdot A \cdot \mu(\bar{y}) + \mu^t(\bar{y}) \cdot A \cdot \lambda(\bar{x}) + \mu^t(\bar{y}) \cdot A \cdot \mu(\bar{y}) = 0$$

$$* \quad \lambda^2 t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{x}) + 2\lambda \mu^t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{y}) + \mu^2 t(\bar{y}) \cdot A \cdot (\bar{y}) = 0$$



Sia $\bar{X} \in \text{Im}[f] - W[f]$ Cerco i punti $\bar{Y}$ tali che la retta $\bar{X}\bar{Y}$ sia tangente a $[f]$ in $\bar{X}$

*

$$\lambda^2 t(\bar{X}) \cdot A(\bar{X}) + 2\lambda \mu t(\bar{X}) \cdot A(\bar{Y}) + \mu^2 t(\bar{Y}) \cdot A(\bar{Y}) = 0$$

$$\bar{X} \in \text{Im}[f]$$

mi dice
che $\mu=0$
dà una intersezione: proprio $\bar{X}$

L'altra intersezione si ottiene

$$\text{da } \frac{\mu}{\lambda} = - \frac{2 t(\bar{X}) \cdot A(\bar{Y})}{t(\bar{Y}) \cdot A(\bar{Y})}$$

Affinché anche questa intersezione coincida con

$$\bar{X}, \text{ occorre che } \frac{\mu}{\lambda} = 0 = - \frac{2 t(\bar{X}) \cdot A(\bar{Y})}{t(\bar{Y}) \cdot A(\bar{Y})} \Leftrightarrow t(\bar{X}) \cdot A(\bar{Y}) = 0$$

$$\mu (2\lambda t(\bar{X}) \cdot A(\bar{Y}) + \mu t(\bar{Y}) \cdot A(\bar{Y})) = 0$$

Caso (i): $\text{Im}[f] \cap \text{retta} = \{\bar{X}\}$

$$\neq 0 (\bar{Y} \notin \text{Im}[f])$$

Condizione di tangenza (ii): tutta la retta contenuta in

Allora

$$\lambda^2 t(\bar{x}) \cdot A(\bar{x}) + 2\lambda \mu t(\bar{x}) \cdot A(\bar{y}) + \mu^2 t(\bar{y}) \cdot A(\bar{y}) = 0$$

$\bar{y} \in I_w$

$\bar{x} \in I_w$

devesse essere una identità in λ e μ
Tutti i coefficienti devono essere nulli, quindi,
anche a

Perciò anche per la tangenza di tipo (ii) deve valere

$$t(\bar{x}) \cdot A(\bar{y}) = 0$$

Cioè $\bar{x}$ deve appartenere a $\pi(\bar{y})$.

$[f]$ iperquadrica non specializzata. $\bar{X} \in I_m[f]$, $\pi = z(\bar{X})$,
 iperpiano tangente ad $[f]$ in $\bar{X}$. Tesi: $I_m[f] \cap \pi$ è
 o un punto o un'unione di rette per $\bar{X}$.

DIM. Se $I_m[f] \cap \pi = \{\bar{X}\}$ ha già finito

Suppongo che $\exists \bar{Y} \in I_m[f] \cap \pi$ con $\bar{Y} \neq \bar{X}$

Interseco $I_m[f]$ con la retta $\bar{X}\bar{Y}$:

$$\lambda^2 \underbrace{t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{X})}_{\substack{\parallel \\ \bar{X} \in I_m}} + 2\lambda \underbrace{\mu \cdot t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y})}_{\substack{\parallel \\ \bar{Y} \in z(\bar{X})}} + \underbrace{\mu^2 \cdot t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Y})}_{\substack{\parallel \\ \bar{Y} \in I_m}} = 0$$

ma allora $*$ è in realtà una identità, cioè soddisfatta da
 OGNI (λ, μ) , perciò tutta la retta $\bar{X}\bar{Y}$ è contenuta nella intersezione.