$$x^2+6xy+9y^2-4y+5=0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{non deg.}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -3 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-9)-9 = \lambda^2-10\lambda+\cancel{9}-\cancel{9} = \lambda(\lambda-10)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$-6+10x+30y=0 \quad \text{asse}$$

$$U_0: \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ \cancel{-3} & \cancel{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$-l-3m=0$$

$$\mathcal{B}_{U_0} = ((3,-1))$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{3} \\ -2 & \boxed{3} & \boxed{9} \end{pmatrix} \qquad |M_{00}| = 0 \Rightarrow \text{parabola}$$

$$U_{10}: \begin{pmatrix} \cancel{9} & \cancel{-3} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-3l+m=0$$

$$\mathcal{B}_{U_{10}} = ((1,3))$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{1}\,X_0 \\ \cancel{x}\,X_1 \\ \cancel{y}\,X_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2X_0 = 0$$

$$\begin{cases} x^2+6xy+9y^2-4\cancel{y}t+5\cancel{t}t^2=0 \\ t=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+3y)^2=0 \\ t=0 \end{cases}$$

$P_\infty \equiv (0, 3, -1)$

$\quad\quad\quad\ \ l \quad m$

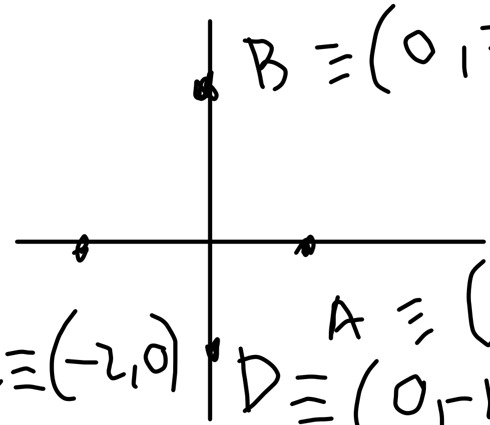
$(l', m') \sim (1, 3)$

$Q_\infty \equiv (0, 1, 3)$

rappresenta la direzione ortogonale a quella comune a tutti i diametri, in particolare dell'asse

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

asse



$B \equiv (0,3)$ $A \equiv (1,0)$ $C \equiv (-2,0)$ $D \equiv (0,-1)$

Trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche per A, B, C, D.

$\Gamma_1 = AC \cup BD$ $\quad AC: y=0 \quad BD: x=0$

$\Gamma_2 = AB \cup CD$ $\quad AB: \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{3-0} \quad 3x-3+y=0$

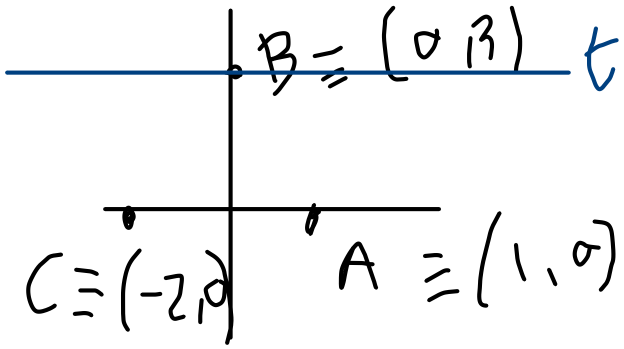
$CD: \frac{x+2}{0+2} = \frac{y-0}{-1-0} \quad +x+2+2y=0$

$\Gamma_1: xy=0$

$\Gamma_2: (3x+y-3)(x+2y+2)=0$

$$\mathcal{F}: \lambda xy + \mu(3x+y-3)(x+2y+2)=0$$

$$k = \frac{\lambda}{\mu} \qquad kxy + (\quad)(\quad) = 0$$



Trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche per A, B, C, tangenti in B a $t: y=3$

$\Gamma_1 = t \cup AC$

$\Gamma_2 = AB \cup BC$

$AC: y=0 \quad t: y-3=0$

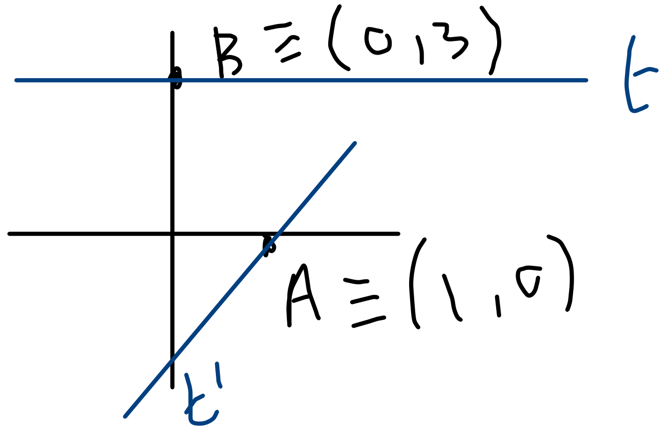
$AB: 3x+y-3=0$

$BC: \dfrac{x-0}{-2-0} = \dfrac{y-3}{0-3} \quad -3x+2y-6=0$

$\Gamma_1: y(y-3)=0$

$\Gamma_2: (3x+y-3)(-3x+2y-6)=0$

$\mathcal{F}: \lambda y(y-3) + \mu(3x+y-3)(-3x+2y-6)=0$



Trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche per A e B, tangenti in A a t': $y = x - 1$ e in B a t: $y = 3$

$\Gamma_1 = t \cup t'$

$AB: 3x + y - 3 = 0$

$\Gamma_2 = AB$ contata 2 volte

$\Gamma_1: (y-3)(y-x+1)$

$\Gamma_2: (3x+y-3)^2 = 0$

$$\mathcal{F}: \lambda(y-3)(y-x+1) + \mu(3x+y-3)^2 = 0$$

Date le rette r, s di eq. $y=0$, $y=2x$ e la conica $\Gamma: 2xy-y^2-2x+3y+4=0$, trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per i punti di intersezione di Γ con r ed s.

$$\lambda y(y-2x)+\mu(2xy-y^2-2x+3y+4)=0$$

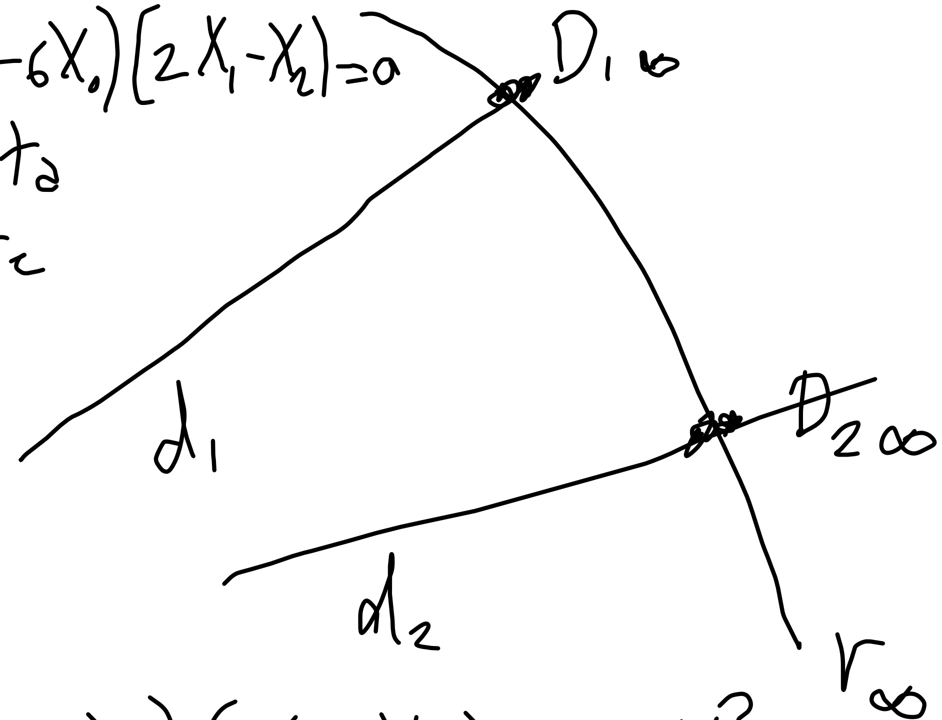
Data l'ellisse $\mathcal{E}: 5x^2+5y^2+6xy+10x+6y-11=0$ trovare il fascio di coniche passanti per i vertici di $\mathcal{E}$.

Date le rette $d_1: x+2y-6=0$, $d_2: 2x-y=0$, trovare il fascio $\mathcal{F}$ di iperboli aventi d_1 e d_2 come asintoti.

$\Gamma_1 = d_1 \cup d_2 : (X_1+2X_2-6X_0)(2X_1-X_2)=0$

$\Gamma_2 = D_{1\infty} D_{2\infty}$ contata 2 volte

$X_0^2=0$

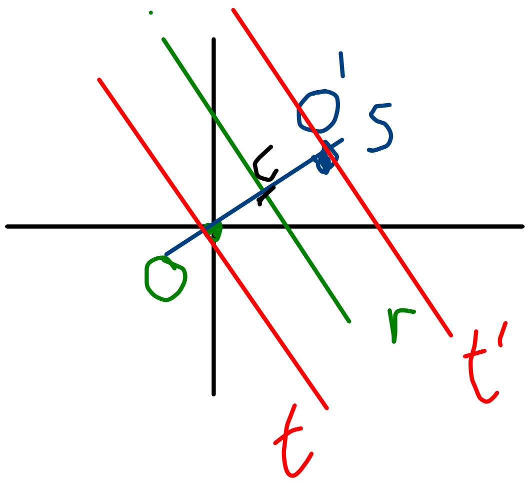


$$\mathcal{F}: \lambda(X_1+2X_2-6X_0)(2X_1-X_2)+\mu X_0^2=0$$

$$\lambda(x+2y-6)(2x-y)+\mu=0$$

Dati $d_1: x+2y-6=0$, $d_2: 2x-y=0$, $A \equiv (1,1)$, trovare il fascio di iperboli passanti per A, aventi d_1 come asintoto e il secondo asintoto parallelo a d_2.

Trovare il fascio $\mathcal{F}$ di coniche aventi per asse $r: 2x+y-2=0$ e aventi un vertice nell'origine O.



$\Gamma_1: t \cup t'$

$\Gamma_2: s$ contata 2 volte

s: retta per O, $\perp r$

$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{1}$ $\quad x-2y=0$

$C = r \cap s$ $\quad \begin{cases} 2x+y=2 \\ x-2y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 5y=2 \\ x-2y=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=\frac{2}{5} \\ x=\frac{4}{5} \end{cases}$ $\quad C \equiv \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$

$\frac{O+O'}{2} = C$ $\quad O' = 2C - O$ $\quad O' \equiv \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) - (0,0) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$t: 2x+y=0$ $\quad t': 2\left(x-\frac{8}{5}\right)+1\left(y-\frac{4}{5}\right)=0$ $\quad 2x+y-4=0$

$\mathcal{F}: \lambda(2x+y)(2x+y-4) + \mu(x-2y)^2 = 0$

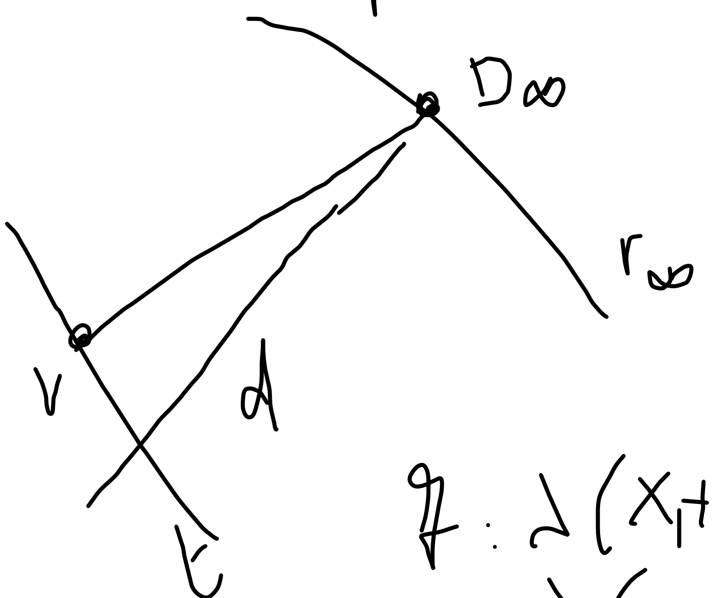
Detta P la parabola tale che: $\begin{cases} x=\alpha \\ y=2\alpha-2 \end{cases}$ coordinate

1) $V=(0,1)$ vertice, 2) $d: y=2x-2$ diametro, 3) d coniugato alla dir. d'asse.

trovarla.

Costruisco il fascio $\mathcal{F}$ di parabole tale che 1) e 2).

Il centro (che è anche il punto di tangenza con r_∞) di tutte le parabole di $\mathcal{F}$ è il punto improprio di d: $D_\infty \equiv (0,1,2)$



Allora VD_∞ è l'asse di tutte le parabole

t, retta per V, $\perp VD_\infty$, è tangente a tutte loro

$VD_\infty: \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-1}{2} \qquad 2x-y+1=0$ asse

$t: 1(x-0)+2(y-1)=0 \qquad x+2y-2=0$

$\Gamma_1 = t \cup r_\infty$

$\Gamma_2 = VD_\infty$ contata 2 volte

$$\mathcal{F}: \lambda(X_1+2X_2-2X_0)X_0 + \mu(2X_1-X_2+X_0)^2 = 0$$

$$\lambda(x+2y-2) + \mu(2x-y+1)^2 = 0 \qquad k = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\lambda(x+2y-2)+\mu(2x-y+1)^2=0$

$k(x+2y-2)+4x^2+y^2+1-4xy+4x-2y=0$

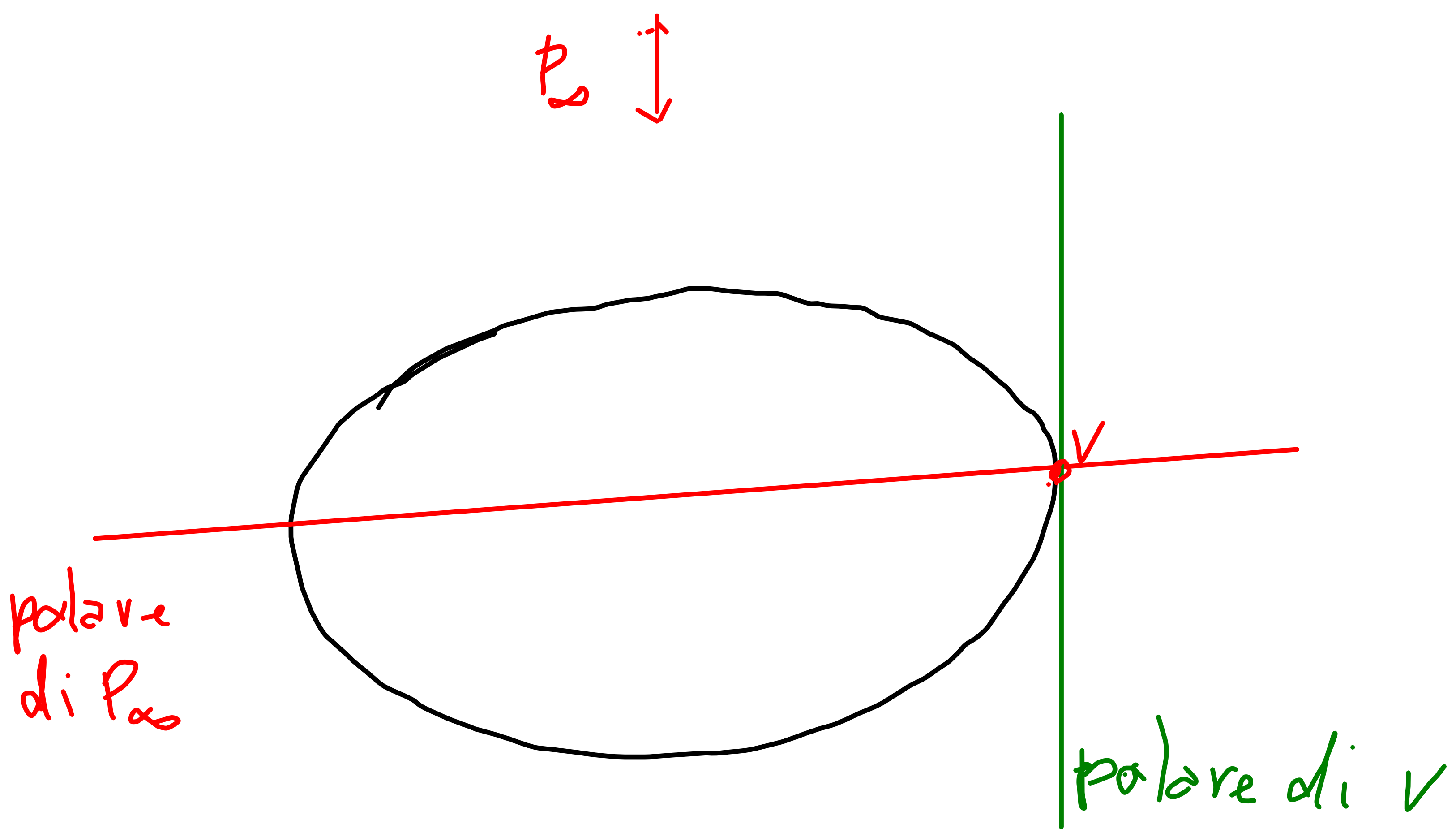
$4x^2-4xy+y^2+(4+k)x+(2k-2)y+1-2k=0$

$$A_k=\begin{pmatrix}(1-2k) & (2+\frac{k}{2}) & (k-1)\\ (2+\frac{k}{2}) & 4 & -2\\ (k-1) & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Impongo 3): $d: y=2x-2$ dev'essere la polare di $X_\infty \equiv (0,1,0)$. Per farlo, trovo un punto proprio di d, per esempio $D\equiv(0,-2)$ e impongo alla polare di X_∞ di passare per D: polare di X_∞, $(0\,1\,0)\,A_k\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=0$

$2+\frac{k}{2}+4x-2y=0$ impongo passaggio per D!

$2+\frac{k}{2}+0+4=0$ $\quad\frac{k}{2}=-6$ $\quad k=-12$



P_∞
V
polare di P_∞
polare di V

Sia $r: (a+ib)x + (c+id)y + (e+if) = 0$ una retta immaginaria.

Considero $\overline{r}: (a-ib)x + (c-id)y + (e-if) = 0$

interseco

somma $\begin{cases} 2ax + 2cy + 2e = 0 \\ 2ibx + 2idy + 2if = 0 \end{cases}$ differenza

equivalente! $\begin{cases} ax + cy + e = 0 \\ bx + dy + f = 0 \end{cases}$ $\longleftarrow$ rette reali

quindi l'intersezione è un punto reale

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

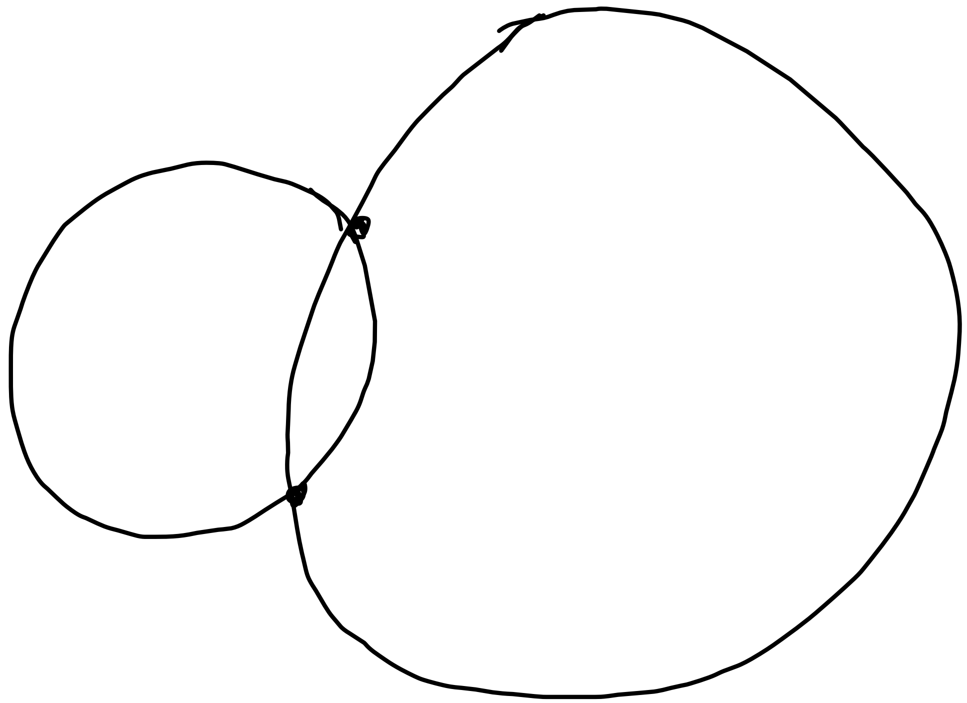
$$\begin{cases} X_1^2+X_2^2+\cancel{aX_1X_0}+\cancel{bX_2X_0}+\cancel{cX_0^2}=0 \\ X_0=0 \end{cases}$$

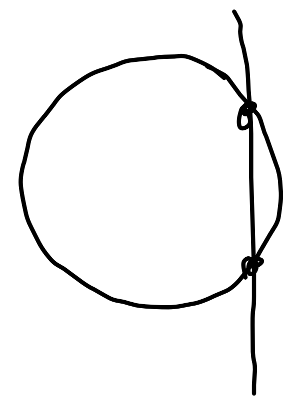
$$\begin{cases} X_1^2+X_2^2=0 \\ X_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2=\pm i X_1 \\ X_0=0 \end{cases}$$

$(0,1,i)$

$(0,1,-i)$





$$x^2+y^2=-1$$

$$x^2+y^2=0$$