Insiemi e spazi d'uso più frequente:

$\mathbb{N}^0$ (numeri naturali, zero compreso), $\mathbb{Z}$ (interi), $\mathbb{Q}$ (razionali), $\mathbb{R}$ (reali), $\mathbb{C}$ (complessi). $\mathbb{E}^n$ spazio euclideo di dimensione n. $\mathbb{N} = \mathbb{N}^0 - \{0\}$.

$\mathbb{N}^0_n = \{i \in \mathbb{Z} \,/\, 0 \leq i \leq n\}$, $\mathbb{N}_n = \mathbb{N}^0_n - \{0\}$.

$I = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x \leq 1\}$.

$D^n = \{X \in \mathbb{E}^n \,/\, \|X\| \leq 1\}$, $\mathring{D}^n = \{X \in \mathbb{E}^n \,/\, \|X\| < 1\}$.

$S^n = D^{n+1} - \mathring{D}^{n+1} = \{X \in \mathbb{E}^{n+1} \,/\, \|X\| = 1\}$.

Tutti gli spazi topologici usati nel seguito si intendono paracompatti e di Hausdorff.

1 - *Top, Diff, PL*. [S 2.1-2.3, M 2.3, H 2.1.a]

Siano $U \subset \mathbb{E}^k$, $V \subset \mathbb{E}^l$ insiemi aperti. Un'applicazione $f: U \to V$ si dice *di classe C^r* $(r \in \mathbb{N})$ se è continua e tutte le derivate parziali $\frac{\partial^h f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_h}}$ $(h \in \mathbb{N}_r)$ esistono e sono continue. Dati insiemi arbitrari $X \subset \mathbb{E}^k$, $Y \subset \mathbb{E}^l$, un'applicazione $f: X \to Y$ si dice *di classe C^r* se, per ogni $x \in X$, esistono un intorno aperto U di x ed un'applicazione di classe C^r $g: U \to \mathbb{E}^l$ tale che $f|_{U \cap X} = g|_{U \cap X}$. Si scriverà $f \in C^r(X,Y)$ o semplicemente $f \in C^r$; si definisce $C^\infty(X,Y) = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} C^r(X,Y)$; infine, per X e Y qualunque, $C^0(X,Y)$ indicherà la classe delle applicazioni continue da X ad Y (anche dette *mappe*). Un *diffeomorfismo di classe C^r* $f: X \to Y$ è un'applicazione biiettiva di classe C^r, tale che $f^{-1} \in C^r(Y,X)$.

Un insieme $M \subset \mathbb{E}^k$ è detto *varietà di classe C^r* $(r \in \mathbb{N}^0)$ *di dimensione n*, se per ogni $x \in M$ vi è un diffeomorfismo di classe C^r $f: W \to U$, dove W è un intorno di x in M (nella topologia indotta da $\mathbb{E}^k$) e U è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{E}^n$.

Le varietà (di qualunque dimensione) di classe C^r, e le applicazioni di classe C^r fra di esse, formano una categoria, per r fissato. In particolare, si indica con Top la categoria delle varietà di classe C^0

(varietà topologiche) e delle applicazioni continue, e con Diff la categoria delle varietà e applicazioni di classe C^∞ (varietà e applicazioni lisce).

Le due ultime categorie sono essenzialmente diverse, nel senso che esistono varietà equivalenti in Top (cioè omeomorfe) e non equivalenti in Diff (cioè non diffeomorfe); ciò si esprime anche dicendo che "esistono più strutture differenziabili su una stessa varietà topologica" (si veda l'ultima parte di questo paragrafo).

Talvolta ci occuperemo delle varietà con bordo di classe C^r di dimensione n, intendendo sottoinsiemi $M \subset \mathbb{E}^k$ tali che, per ogni $x \in M$, vi è un diffeomorfismo di classe C^r $f: W \longrightarrow U$, dove W è un opportuno intorno di x in M e U è un sottoinsieme aperto del semispazio $\mathbb{E}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n \mid x_n \geq 0\}$. L'insieme $\mathring{M}$ di punti di M che ammettono un intorno diffeomorfo a $\mathring{D}^n$ forma una varietà di classe C^r n-dimensionale nel senso precedente. Inoltre $\dot{M} = M - \mathring{M}$ (spesso indicato come ∂M) è una varietà di classe C^r $(n-1)$-dimensionale detta bordo di M. Le varietà, nel senso definito precedentemente, si possono considerare varietà con bordo vuoto; una varietà si dice chiusa se è compatta e con bordo vuoto. Nel seguito, a meno di diversa indicazione, il termine "varietà" sarà riservato alle varietà con bordo vuoto.

Dati, in uno spazio euclideo $\mathbb{E}^m$, $n+1$ punti affinemente indipendenti $v^0, \dots, v^n$, la chiusura convessa di $\{v^0, \dots, v^n\}$, cioè $s^n = \{p \in \mathbb{E}^m \mid p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v^i \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}$ si dirà simplesso (affine) di dimensione n (o n-simplesso) generato da $v^0, \dots, v^n$, e si indicherà spesso con il simbolo $\langle v^0, \dots, v^n \rangle$; $v^0, \dots, v^n$ sono detti vertici di s^n. Con leggero abuso di linguaggio, uno 0-simplesso verrà sempre confuso con il proprio unico vertice. Gli 1-simplessi sono anche detti lati o spigoli. Dato un n-simplesso s^n, e dato un insieme di $q+1$ suoi vertici ($q \geq 0$), il q-simplesso da essi generato si dice faccia di s^n; una faccia s^q di s^n si dice propria se $s^q \neq s^n$.

Un *complesso simpliciale* (o, brevemente, *complesso*) K è un insieme di simplessi di uno stesso spazio E^m, tale che

(a) se $s^n \in K$ e s^q è faccia di s^n, allora $s^q \in K$;

(b) se $s^n, s^r \in K$, allora $s^n \cap s^r$ o è vuoto, o è una faccia comune di s^n ed s^r;

(c) ogni simplesso di K è faccia di un insieme finito di simplessi di K;

(d) rispetto alla topologia indotta da E^m, $A \subset \cup K$ è chiuso se e solo se, per ogni $s \in K$, $A \cap s$ lo è.

Si dice *dimensione* di un complesso K, e si indica con $\dim K$, la massima delle dimensioni dei suoi simplessi.

Dati complessi K ed L, una *applicazione simpliciale* da K a L è una applicazione $f : K \longrightarrow L$ tale che

(1) per ogni vertice (cioè 0-simplesso) v di K, $f(v)$ è un vertice;

(2) se $s^n = \langle v^0, \dots, v^n \rangle \in K$, allora $f(s^n)$ è generato da $f(v^0), \dots, f(v^n)$.

Dato un complesso K, un insieme $L \subset K$ che sia un complesso si dice *sottocomplesso* di K.

Esempi

(1.1) Dato un simplesso s^n, l'insieme $\bar{s}^n$ di tutte le facce di s^n (esso stesso compreso) è un complesso simpliciale; l'insieme $\dot{s}^n$ di tutte le facce proprie di s^n costituisce un sottocomplesso di $\bar{s}^n$ detto *bordo* di s^n.

(1.2) Dato un complesso K ed un simplesso $s^q \in K$, la *stella di s^q in K* è l'insieme $st(s^q, K)$ formato da tutti i simplessi di K contenenti s^q, e da tutte le loro facce; essa è un sottocomplesso di K. L'insieme $lk(s^q, K)$ formato dai simplessi di $st(s^q, K)$ disgiunti da s^q è un sottocomplesso di $st(s^q, K)$ detto *cintura di s^q in K*.

(1.3) Dato un complesso K, l'insieme dei suoi simplessi di dimensione $\leq r$ (dove $r \leq \dim K$) costituisce un suo sottocomplesso denotato da K^r e detto *r-scheletro di K*.

I complessi e le applicazioni simpliciali costituiscono rispettivamente gli oggetti e i morfismi di una categoria.

Ogni n-simplesso, con la topologia indotta da $\mathbb{E}^m$, è omeomorfo a D^n.

Si dice <u>corpo</u> (o <u>spazio</u>) di un complesso K lo spazio topologico $|K|$ il cui insieme di punti è l'unione dei simplessi di K, e la cui topologia è quella indotta da $\mathbb{E}^m$. Per ogni punto $p \in |K|$, il simplesso di minima dimensione fra quelli contenenti p è detto il <u>supporto</u> di p.

Data una qualunque applicazione simpliciale $f : K \to L$, si noti che essa è completamente determinata dalla propria restrizione allo 0-scheletro K^0. Ad f si associa una applicazione continua $|f| : |K| \longrightarrow |L|$ come segue: per ogni $p \in |K|$, $p = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i v^i$, dove $\{v^i\}_{i \in \mathbb{N}_q}$ è l'insieme dei vertici del supporto di p; si definisce, allora,

$$|f|(p) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i \, f(v^i) \quad .$$

"$|\ |$" (che si legge "corpo") è un funtore dalla categoria dei complessi e delle applicazioni simpliciali alla categoria degli spazi topologici e applicazioni continue. L'immagine di $|\ |$ è una sottocategoria di tale categoria: i suoi oggetti si dicono <u>poliedri</u> e i suoi morfismi <u>applicazioni lineari a tratti</u> (o <u>PL</u>). $|\ |$ <u>non</u> è un funtore fedele.

Una <u>triangolazione</u> di uno spazio topologico X è una coppia (K, f), dove K è un complesso e $f : |K| \longrightarrow X$ è un omeomorfismo. Talvolta si dirà che K <u>triangola</u> X o, con abuso, che è esso stesso una triangolazione di X.

Si è già visto, per esempio, che ogni $\bar{s}^n$ triangola D^n; inoltre $\dot{s}^n$ triangola S^{n-1}. Importante è il fatto che, se K triangola uno spazio compatto, K è finito.

Due triangolazioni (K, f), (L, g) di uno stesso spazio X si dicono <u>equivalenti</u> se esiste un omeomorfismo PL $h : |K| \longrightarrow |L|$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
{|K|} \arrow[dr, "f"] \arrow[d, "h"'] & \\
{|L|} \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}$$

Una *suddivisione* di un complesso K è un complesso L tale che $|L| = |K|$ e ogni simplesso di L è contenuto in un simplesso di K.

Le nozioni, relative a complessi simpliciali, di maggiore interesse saranno quelle invarianti per suddivisione.

Proposizione 1.1 - Se due complessi K, L hanno lo stesso poliedro come corpo, essi ammettono una suddivisione comune. $\sharp$

Un complesso n-dimensionale K si dice *varietà combinatoria n-dimensionale* se, per ogni vertice v di K, esiste un'applicazione simpliciale biiettiva da un'opportuna suddivisione di $lk(v,K)$ ad un'opportuna suddivisione del bordo di un n-simplesso; detto altrimenti, $|lk(v,K)|$ è PL-omeomorfo al corpo del bordo di un n-simplesso. Il concetto di varietà combinatoria risulta, in effetti, invariante per suddivisione; pertanto è ben data la seguente definizione: un poliedro $M = |K|$ si dice *varietà PL* se K è una varietà combinatoria. Le varietà PL e le applicazioni PL fra esse formano una categoria, indicata da PL.

Una *varietà combinatoria n-dimensionale con bordo* è definita come un complesso n-dimensionale K in cui, per ogni vertice $v \in K$, $|lk(v,K)|$ è PL-omeomorfo o (1) al corpo del bordo di un n-simplesso, o (2) ad un $(n-1)$-simplesso. Per ogni vertice v vi è un omeomorfismo PL $f : |st(v,K)| \longrightarrow |\bar{s}^n|$; per ogni vertice v di tipo (2), si considerino gli $(n-1)$-simplessi di $f^{-1}(|\dot{s}^n|)$ che non fanno parte di $|lk(v,K)|$; tali simplessi, con le loro facce, costituiscono un sottocomplesso di K detto *bordo* di K, che è in effetti una varietà combinatoria $(n-1)$-dimensionale. Una *varietà PL con bordo* è il corpo M di una varietà combinatoria con bordo; il *bordo* $\dot{M}$ di M è il corpo del bordo di K.

Nel seguito utilizzeremo spesso una triangolazione nello studio di una varietà topologica, perchè, in generale, calcoli e dimostrazioni sono più semplici nella categoria PL che nella categoria Top. Un primo problema essenziale è, quindi, sapere quali varietà siano triangolabili; un problema altrettanto importante è quello della validità della cosiddetta <u>Hauptvermutung</u> (o "congettura fondamentale della topologia") che asseriva che due triangolazioni qualsiasi di una stessa varietà topologica hanno corpi PL-omeomorfi.

Triangolabilità e Hauptvermutung sono banali in dimensione 1 (dove le uniche varietà connesse sono S^1 ed $\mathbb{E}^1$) e sono state dimostrate per le dimensioni 2 [Radó 1925] e 3 [Moise 1952]. La Hauptvermutung non vale per dimensione $n \geq 5$ [Kirby e Siebenmann 1969] (*); nelle stesse dimensioni, non tutte le varietà topologiche sono triangolabili mediante varietà combinatorie. Sono tuttora irrisolti i problemi della validità della Hauptvermutung in dimensione 4 e della triangolabilità (mediante complessi che eventualmente non siano varietà combinatorie) in dimensione $n \geq 4$.

La non triangolabilità significa che, per $n \geq 5$, qualora si volesse sostituire la classificazione in Top (cioè di varietà topologiche a meno di omeomorfismi) con la classificazione in PL (cioè di varietà PL a meno di omeomorfismi PL), allora alcune varietà topologiche verrebbero trascurate; la falsità della Hauptvermutung significa che alcune varietà omeomorfe verrebbero distinte.

(*) Si può addirittura dimostrare che la stessa sfera S^n $(n \geq 5)$ ammette triangolazioni (K, f) dove K non è una varietà combinatoria [Edwards 1975]; tali complessi K non hanno, ovviamente, corpi PL-omeomorfi al corpo del bordo di un $(n+1)$-simplesso

Dato che, storicamente e per le applicazioni, la categoria più notevole è Diff, è confortante sapere che le varietà lisce sono tutte triangolabili mediante varietà combinatorie [Cairns 1935]. Invece esistono, per $n \geq 10$, n-varietà PL (e quindi anche topologiche) che non ammettono alcuna struttura differenziabile [Kervaire 1960]; ma già in dimensione 4 esistono varietà topologiche che non ammettono struttura differenziabile nè PL [Freedman 1982].

Inoltre, una stessa n-varietà PL può ammettere diverse struttur differenziabili per $n \geq 7$ [Hirsch 1963]; il primo esempio in tal senso è fornito dalle "sfere esotiche", cioè n-varietà C^∞, per $n \geq 7$, ch sono (Top) omeomorfe ma non diffeomorfe ad S^n [Milnor 1956]. Un risultato positivo è l'esistenza e unicità di una struttura differenziabile su una 4-varietà PL [Cairns 1944]; tale risultato è stato esteso alle dimensioni 5 e 6 nello stesso [Hirsch 1963].

La coincidenza (indicata con =), o meno, delle equivalenze nelle varie categorie si può, infine, riassumere nel seguente quadro

dimensione:	≤ 3	$4,5,6$	≥ 7
	$\begin{matrix} & \mathrm{Top} & \\ // & & \backslash\backslash \\ PL & = & \mathrm{Diff} \end{matrix}$	$\begin{matrix} & \mathrm{Top} & \\ \not/ & & \not\backslash \\ PL & = & \mathrm{Diff} \end{matrix}$	$\begin{matrix} & \mathrm{Top} & \\ \not/ & & \not\backslash \\ PL & \neq & \mathrm{Diff} \end{matrix}$

Una trattazione sistematica del confronto fra le tre categorie è contenuta in [Buoncristiano 2003, I.2].

Spesso useremo una comoda variante del concetto di complesso simpliciale: __Δ-complesso__ (finito) è ogni coppia $K = (\{s_\alpha \mid \alpha \in A\}, \{\mathcal{F}_j \mid j \in \mathbb{N}_n\})$, dove $\{s_\alpha \mid \alpha \in A\}$ è un insieme finito di simplessi disgiunti, i cui insiemi di vertici siano totalmente ordinati, $n = \max\{\dim s_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ed ogni $\mathcal{F}_j$ è una partizione dell'insieme delle j-facce dei simplessi s_α. __Corpo__ $|K|$ è lo spazio quoziente ottenuto da $\bigcup_{\alpha \in A} s_\alpha$ identificando fra loro le j-facce appartenenti ad una stessa classe di $\mathcal{F}_j$ mediante applicazioni affini che conservino l'ordine dei vertici.

Tutte le nozioni introdotte per i complessi simpliciali si estendono ai Δ-complessi. Nel seguito, quando si parlerà di complessi simpliciali, s'intenderà tacitamente che gli stessi concetti si applicano anche ai Δ-complessi.

Si veda il cap. 2 per la nozione di suddivisione baricentrica $\mathrm{sd}\,K$ di un complesso K. Si può dimostrare che la doppia suddivisione baricentrica $\mathrm{sd}^2 K$ di un Δ-complesso K è isomorfa ad un complesso simpliciale vero e proprio.

[Buoncristiano 2003] S. B., Fragments of geometric topology from the sixties, Geometry and Topology Monographs, vol. 6 (2003) ottenibile gratuitamente all'indirizzo:
http://www.math.warwick.ac.uk/gt/ftp/main/m6/m6-main.pdf

[Cairns 1935] S. S. C., Triangulation of the manifold of class one, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935), 549, 552.

[Cairns 1944] S. S. C., Introduction of a Riemannian geometry on a triangulable 4-manifold, Ann. of Math. 41 (1944), 218-219.

[Edwards 1975] R. D. E., The double suspension of a certain homology 3-sphere in S^5, Notices Amer. Math. Soc. 22 (1975) Abstr. #75 T-G33.

[Freedman 1982] M. H. F., The topology of four-dimensional manifolds, J. Differential Geometry 17 (1982), 357-453.

[Hirsch 1963] M. W. H., Obstruction theories for smoothing manifolds and maps, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 352-356.

[Kervaire 1960] M. A. K., A manifold which does not admit any differentiable structure, Comm. Math. Helv. 34 (1960), 257-270.

[Kirby and Siebenmann 1969] R. K. e L. C. S., On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 742-749.

[Milnor 1956] J. W. M., On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Ann. of Math. 64 (1956), 399-405.

[Moise 1952] E. E. M., Affine structures in 3-manifolds V, Ann. of Math. 56 (1952), 96-114.

[Radó 1925] T. R., Über den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Litt. Sci. Szeged 2 (1925), 101-121.