8 - Orientazione. [S4 es. E-F, M5.3, H3.3.a]

La dimostrazione del teorema seguente è eseguita, qui, solo per varietà PL, in quanto ciò permette di riconoscere il significato geometrico dei concetti che ne derivano. Và notato, comunque, che gli enunciati riportati e la definizione di orientazione valgono nella più ampia categoria Top.

Proposizione 8.1 - Data una varietà chiusa, connessa, n-dimensionale M, si ha che $H_n(M)$ è isomorfo o a $\mathbb{Z}$ o a 0.

Dimostrazione - Sia K una varietà combinatoria che triangola M. Allora
(i) ogni $(n-1)$-simplesso di K è faccia di esattamente due n-simplessi di K;
(ii) comunque dati due n-simplessi di K, esiste una successione finita di simplessi di dimensione, alternativamente, n ed $n-1$, di cui i simplessi dati sono gli estremi, e tale che, di due suoi simplessi consecutivi, quello $(n-1)$-dimensionale è faccia di quello n-dimensionale.

Definiamo coerentemente orientati due n-simplessi s_1^n, s_2^n, aventi come intersezione un $(n-1)$-simplesso s^{n-1}, se s^{n-1} compare con segni opposti in ∂s_1^n e ∂s_2^n. Ora, (i) e (ii) implicano che gli eventuali n-cicli non omologhi a 0 sono somme di tutti gli n-simplessi di K con coefficienti non nulli di modulo uguale. Si presentano due casi: o è possibile, o non è possibile orientare gli n-simplessi in modo che due qualunque di essi, intersecantisi in un $(n-1)$-simplesso, siano coerentemente orientati. Se è possibile, si scelga tale orientazione; la somma di tutti gli n-simplessi è un n-ciclo non omologo a 0, e gli altri sono suoi multipli; se non è possibile, allora l'unico n-ciclo è 0. $\square$

M si dice orientabile se $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$, non orientabile se $H_n(M) = 0$. Fissare un'orientazione su una varietà orientabile M significa fissare una classe fondamentale, cioè un generatore di $H_n(M)$ o, equivalentemente, scegliere uno dei due possibili isomorfismi con $\mathbb{Z}$. Si dirà varietà orientata una varietà orientabile su cui sia stata fissata un'orientazione.

Si dirà *pseudovarietà n-dimensionale* un complesso simpliciale K, ed anche il poliedro suo corpo, tale che ogni suo k-simplesso sia faccia di almeno un suo n-simplesso, per ogni k (condizione di *purezza*), e per cui valgano la (i) (*non ramificazione*) e la (ii) (*connessione forte*) della dimostrazione precedente. La Prop. 8.1 vale anche quando M è una pseudovarietà. Anche per tali spazi si definiscono, nello stesso modo, i concetti di orientabilità e di orientazione.

Esempi.

(8.1) I calcoli già eseguiti di $H_k(S^n)$ mostrano che S^n è orientabile ($n>0$).

(8.2) Lo spazio ottenuto da S^n (o da qualsiasi varietà orientabile $n \geq 2$), identificando un numero finito di punti è una pseudovarietà orientabile.

(8.3) T_1 è orientabile, $U_1 = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ è non orientabile.

(8.4) Le somme connesse di due varietà orientabili M ed N sono orientabili, come si vede scegliendo, come D_1^n e D_2^n (si veda l'es. 3.7), due n-simplessi nei complessi di cui M ed N sono corpi. È invece non orientabile una somma connessa di varietà di cui almeno una sia non orientabile.

(8.5) Sono orientabili, in particolare, tutte le 2-varietà $T_g = T_{g-1} \# T_1$; sono non orientabili tutte le 2-varietà $U_h = U_{h-1} \# U_1$.

Date due varietà orientate n-dimensionali M ed N, di classi fondamentali ξ e ξ rispettivamente, una mappa $f : M \to N$ induce un omomorfismo $f_*^n : H_n(M) \longrightarrow H_n(N)$; l'intero d tale che $f_*^n(\xi) = d \cdot \xi$ si dice *grado di f*, in simboli $d = \deg f$.

Vale anche:

Proposizione 8.2 - Sia M una varietà compatta, connessa, n-dimensionale con bordo $\dot{M}$. Allora $H_n(M, \dot{M})$ è isomorfo o a $\mathbb{Z}$ o a 0. ⊔

Un'orientazione su M sarà allora la scelta di una classe fondamentale $\xi \in H_n(M, \dot{M})$. Il grado di una mappa di coppie $(M, \dot{M}) \longrightarrow (N, \dot{N})$

fra varietà (con bordo) orientate si definisce come nel caso del bordo vuoto.

Proposizione 8.3 - Sia M una n-varietà compatta, connessa, di bordo $\dot{M} \neq \emptyset$. Allora se M è orientabile lo è anche $\dot{M}$.

Dimostrazione (caso $\dot{M}$ connesso) - Si dimostra mediante il Teor. 6.4.a, provando che $H_n(M)=0$ (facile nel caso PL). $\square$

Fissata una classe fondamentale $\xi \in H_n(M, \dot{M})$, la classe $\partial_*(\xi) \in H_{n-1}(\dot{M})$, determina una *orientazione indotta* su $\dot{M}$. Dal Teor. 6.4.b si ottiene che, data $f:(M,\dot{M}) \longrightarrow (N,\dot{N})$, è $\deg f = \deg f|_{\dot{M}}$ (rispetto all'orientazione indotta).

Una varietà non connessa, compatta si dice *orientabile* se tutte le sue componenti connesse sono orientabili, *non orientabile* altrimenti.

$D^0 = \mathring{D}^0$ rappresenta uno spazio costituito da un solo punto; si considera orientabile, e un'orientazione su tale spazio è l'attribuzione formale di un segno + o −.

Proposizione 8.4 - a) Per ogni riflessione

$$f_i : S^n \longrightarrow S^n, \qquad (x_0,\dots,x_i,\dots,x_n) \longmapsto (x_0,\dots,-x_i,\dots,x_n)$$

è $\deg f_i = -1$.

b) Per la mappa antipodale

$$\alpha : S^n \longrightarrow S^n, \qquad (x_0,\dots,x_n) \longmapsto (-x_0,\dots,-x_n)$$

è $\deg \alpha = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ +1 & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$

Dimostrazione - a) Dimostriamo per f_0 (per le altre è la stessa cosa). Poniamo $E^j_+ = \{X = (x_0,\dots,x_j,0,\dots,0) \in S^j \subset S^n \mid x_j > 0\}$, $E^j_- = S^j - \bar{E}^j_+$. Allora si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_{0*}"] & H_n(S^n, E^n_-) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_{0*}"] & H_n(E^n_+, S^{n-1}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_{0*}"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_{0*}"] & H_{n-1}(S^{n-1}, E^{n-1}_-) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_{0*}"] & \cdots \arrow[r, "\cong"] & \tilde{H}_0(S^0) \arrow[d, "f_{0*}"] \\
\tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "\cong"] & H_n(S^n, E^n_-) \arrow[r, "\cong"] & H_n(\bar{E}^n_+, S^{n-1}) \arrow[r, "\cong"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r, "\cong"] & H_{n-1}(S^{n-1}, E^{n-1}_-) \arrow[r, "\cong"] & \cdots \arrow[r, "\cong"] & \tilde{H}_0(S^0)
\end{tikzcd}$$

e, poichè $f_{0*}: \tilde{H}_0(S^0) \longrightarrow \tilde{H}_0(S^0)$ è l'omomorfismo che cambia il segno ad ogni elemento, anche $f_{0*}: \tilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \tilde{H}_n(S^n)$ ha lo stesso effetto, quindi $\deg f_0 = -1$.

b) $\alpha = f_0 f_1 \cdots f_n$, perciò $\deg \alpha = \deg f_0 \cdot \deg f_1 \cdot \ldots \cdot \deg f_n$. $\square$