7 - Successioni di Mayer-Vietoris. Escissione.

Siano K_1 e K_2 complessi simpliciali, sottocomplessi di uno stesso complesso, $i_m : K_1 \cap K_2 \longrightarrow K_m$, $j_m : K_m \longrightarrow K_1 \cup K_2$ $(m = 1,2)$ le inclusioni, e si ponga

$$i : \mathcal{S}(K_1 \cap K_2) \longrightarrow \mathcal{S}(K_1) \oplus \mathcal{S}(K_2)$$
$$c \longmapsto (\mathcal{S}(i_1)(c), -\mathcal{S}(i_2)(c))$$
$$j : \mathcal{S}(K_1) \oplus \mathcal{S}(K_2) \longrightarrow \mathcal{S}(K_1 \cup K_2)$$
$$(c_1, c_2) \longmapsto \mathcal{S}(j_1)(c_1) + \mathcal{S}(j_2)(c_2) \quad ;$$

allora $0 \longrightarrow \mathcal{S}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} \mathcal{S}(K_1) \oplus \mathcal{S}(K_2) \xrightarrow{j} \mathcal{S}(K_1 \cup K_2) \longrightarrow 0$ è una successione esatta corta di complessi e mappe di catene (dove l'operatore di bordo di $\mathcal{S}(K_1) \oplus \mathcal{S}(K_2)$ è la somma $'\partial \oplus {}''\partial$ degli operatori di $\mathcal{S}(K_1)$ e $\mathcal{S}(K_2)$). Applicando il Teor. 6.2.a si ottiene la <u>successione esatta di omologia di Mayer-Vietoris</u>, e inoltre, fatte le dovute modifiche, la <u>successione esatta di omologia ridotta di M.-V.</u> e, per $L_1 \subset K_1$, $L_2 \subset K_2$ sottocomplessi, la <u>successione esatta di omologia relativa di M.-V.</u>:

<u>Teorema 7.1</u> (di Mayer e Vietoris) - Con le notazioni precedenti, le successioni

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_k(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} H_k(K_1) \oplus H_k(K_2) \xrightarrow{j_*} H_k(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_k(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_k(K_1) \oplus \tilde{H}_k(K_2) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_k(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{k-1}(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i_*} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_k(K_1 \cap K_2, L_1 \cap L_2) \xrightarrow{i_*} H_k(K_1, L_1) \oplus H_k(K_2, L_2) \xrightarrow{j_*} H_k(K_1 \cup K_2, L_1 \cup L_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(K_1 \cap K_2, L_1 \cap L_2) \xrightarrow{i_*} \dots$$

sono esatte. $\square$

Si osservi che $\mathcal{S}(K_1 \cap K_2) = \mathcal{S}(K_1) \cap \mathcal{S}(K_2)$ e $\mathcal{S}(K_1 \cup K_2) = \mathcal{S}(K_1) + \mathcal{S}(K_2)$. Invece, per sottospazi X_1 e X_2 di uno spazio topologico, è ancora $S(X_1 \cap X_2) = S(X_1) \cap S(X_2)$, ma $S(X_1 \cup X_2) \neq S(X_1) + S(X_2)$; inoltre, con analoghe definizioni di i e j, cade, in generale, l'esattezza. La versione singolare del Teor. 7.1 richiede, perciò, un'ipotesi topologica suppletiva:

Teorema 7.2 - Siano X_1 e X_2 sottoinsiemi di uno spazio topologico dato, tali che $X_1 \cup X_2 = \mathrm{int}_{X_1\cup X_2}(X_1) \cup \mathrm{int}_{X_1 \cup X_2}(X_2)$. Allora (con i e j analoghe alle mappe del Teor. 7.1) le successioni

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} H_k(X_1) \oplus H_k(X_2) \xrightarrow{j_*} H_k(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} \tilde H_k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} \tilde H_k(X_1) \oplus \tilde H_k(X_2) \xrightarrow{j_*} \tilde H_k(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial_*} \tilde H_{k-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} \dots$$

sono esatte. Per $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$, $A_1 \cup A_2 = \mathrm{int}_{A_1\cup A_2}(A_1) \cup \mathrm{int}_{A_1\cup A_2}(A_2)$, la successione

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_k(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{i_*} H_k(X_1, A_1) \oplus H_k(X_2, A_2) \xrightarrow{j_*} H_k(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{i_*} \dots$$

è esatta. $\square$

Correlato con il Teorema di Mayer-Vietoris è il seguente

Teorema 7.3 (Teorema di escissione) - Siano $U \subset A \subset X$ spazî topologici tali che $\bar U \subset \mathrm{int} A$. Allora, per la mappa di inclusione (detta in questo caso <u>mappa di escissione</u>) $i : (X-U, A-U) \longrightarrow (X, A)$,

$$i_*^k : H_k(X-U, A-U) \longrightarrow H_k(X, A)$$

è un isomorfismo per ogni k. $\square$

<u>Esempî</u>

(7.1) Si usi la successione (simpliciale) di Mayer-Vietoris per dimostrare che, date due n-varietà PL M ed N, per ogni $k \in \mathbb{N}^\circ_{n-2}$ $\tilde H_k(M \# N) \cong \tilde H_k(M) \oplus \tilde H_k(N)$ (es. 3.7).

(7.2) Si può utilizzare come segue la successione (singolare) di Mayer-Vietoris per calcolare l'omologia di S^n senza ricorrere a triangolazioni (es. 6.1), per $n>0$. Siano $p, p' \in S^n$ punti distinti. Allora $S^n - \{p\} \cong S^n - \{p'\} \cong \mathring{D}^n$ è contraibile, e $S^n - \{p, p'\} \simeq S^{n-1}$; l'esattezza di

$$\underbrace{\tilde{H}_i(S^n-\{p\})\oplus\tilde{H}_i(S^n-\{p'\})}_{=0}\longrightarrow\tilde{H}_i(S^n)\longrightarrow\tilde{H}_{i-1}(S^n-\{p,p'\})\longrightarrow\underbrace{\tilde{H}_{i-1}(S^n-\{p\})\oplus\tilde{H}_{i-1}(S^n-\{p'\})}_{=0}$$

mostra che $\tilde{H}_i(S^n)\cong\tilde{H}_{i-1}(S^n-\{p,p'\})\cong\tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ (allo stesso risultato si giunge anche con il Teorema di escissione); ne segue che $\tilde{H}_i(S^n)\cong$ $\cong\tilde{H}_{i-n}(S^0)$ e, tramite le Prop. 5.4, 5.5, 5.7, si ha

$$\tilde{H}_i(S^n)\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & i=n\\ 0 & i\neq n\end{cases}.$$