6 – Successioni esatte

Una successione (finita o infinita) di omomorfismi di gruppi abeliani $\ldots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \longrightarrow \ldots$ si dice esatta in G_n se $\operatorname{Ker}\alpha_n = \operatorname{Im}\alpha_{n+1}$; si dice semplicemente esatta se è esatta in G_n per ogni n (esclusi gli estremi, nel caso finito).

Proposizione 6.1 – Siano G, G', G'' gruppi abeliani, e siano
$$0 \xrightarrow{0} G \xrightarrow{\gamma} G' \quad , \quad G \xrightarrow{\delta} G' \xrightarrow{0} 0 \quad , \quad 0 \xrightarrow{0} G \xrightarrow{\eta} G' \xrightarrow{0} 0$$
$$0 \xrightarrow{0} G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \xrightarrow{0} 0$$
esatte; allora γ e α sono iniettivi, δ e β sono suriettivi, η è un isomorfismo, $G' \cong \operatorname{Ker}\beta$, $G'' \cong \operatorname{Coker}\alpha$. $\square$

Una successione esatta $0 \longrightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \longrightarrow 0$ si dice corta (ometteremo, d'ora in poi, di denominare gli omomorfismi nulli).

Le definizioni di successione esatta in G_n, esatta, esatta corta si estendono sostituendo, ai gruppi abeliani, complessi di catene e agli omomorfismi mappe di catene (il gruppo e gli omomorfismi nulli si possono considerare complessi e mappe di catene).

Teorema 6.2.a – Data una successione esatta corta di complessi e mappe di catene
$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \longrightarrow 0$$
vi è, per ogni k, un omomorfismo ∂_*^k che rende esatta la successione
$$\ldots \longrightarrow H_k(C') \xrightarrow{\alpha_*^k} H_k(C) \xrightarrow{\beta_*^k} H_k(C'') \xrightarrow{\partial_*^k} H_{k-1}(C') \xrightarrow{\alpha_*^{k-1}} H_{k-1}(C) \longrightarrow \ldots$$

Dimostrazione – La successione esatta corta data si esplicita nel diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_{k+1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial'"'] & C_{k+1} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\partial"'] & C''_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial'"'] & C_k \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\partial"'] & C''_k \arrow[r] \arrow[d, "\partial''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{k-1} \arrow[r, "\alpha"] & C_{k-1} \arrow[r, "\beta"] & C''_{k-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definiamo ∂_*^k per una generica classe $\{z''\} \in H_k(C'')$; $z'' \in Z_k(C'') \subset C''_k$, perciò esiste $c \in \beta^{-1}(z'') \subset C_k$; scelto un tale c, si ha $\beta\partial(c) = \partial''\beta(c) = \partial''(z'') = 0$, perciò $\partial(c) \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$; vi è un solo $c' = \alpha^{-1}(\partial(c)) \in C'_{k-1}$; allora poniamo $\partial^k_*(\{z''\}) = \{c'\}$.

Dimostriamo che ∂^k_* (brevemente: ∂_*) è un omomorfismo ben definito. Sia $c_1 \in C_k$ un'altra catena tale che $\beta(c_1) \in \{z''\}$; allora esiste $d'' \in C''_{k+1}$ per cui $\beta(c_1) = z'' + \partial''(d'')$. Scegliamo $d \in \beta^{-1}(d'') \subset C_{k+1}$. Allora

$$\beta(c_1) = \beta(c) + \partial''\beta(d) = \beta(c + \partial(d))$$

pertanto esiste $d' \in C'_k$ $(\cong \operatorname{Ker}\beta_k)$ tale che $c_1 = c + \partial(d) + \alpha(d')$. Quindi

$$\partial(c_1) = \partial(c) + \partial\alpha(d') = \alpha(c') + \alpha\partial'(d') = \alpha(c' + \partial'(d'));$$

dunque $\alpha^{-1}(\partial(c_1)) = c' + \partial'(d') \in \{c'\}$ come si voleva.

Dimostriamo l'esattezza in $H_k(C'')$, lasciando al lettore la dimostrazione delle altre. 1) $\operatorname{Im}\beta_* \subset \operatorname{Ker}\partial_*$. Sia $\{z\} \in H_k(C)$; allora

$$\partial_*\beta_*(\{z\}) = \partial_*(\{\beta(z)\}) = \{\alpha^{-1}\partial\beta^{-1}\beta(z)\} = \{\alpha^{-1}\partial(z)\} = \{\alpha^{-1}(0)\} = 0.$$

2) $\operatorname{Ker}\partial_* \subset \operatorname{Im}\beta_*$. Sia $\{z''\} \in \operatorname{Ker}\partial_*$. Allora vi è $c \in \beta^{-1}(z'') \subset C_k$ e, dato che $\{\alpha^{-1}\partial(c)\} = 0$, vi è $d' \in C'_k$ tale che $\alpha^{-1}\partial(c) = \partial'(d')$. Consideriamo $c - \alpha(d') \in C_k$; vale $\partial(c - \alpha(d')) = \partial(c) - \alpha(\partial'(d')) = 0$. Allora $\{c - \alpha(d')\} \in H_k(C)$ e $\beta_*(\{c - \alpha(d')\}) = \{\beta(c) - \beta\alpha(d')\} = \{z''\}$. $\square$

L'omomorfismo ∂_* prende il nome di <u>omomorfismo di connessione</u>.

<u>Teorema 6.2.6</u> – Ad ogni diagramma commutativo di complessi e mappe di catene a righe esatte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & C'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \bar{C}' \arrow[r, "\bar\alpha"'] & \bar{C} \arrow[r, "\bar\beta"'] & \bar{C}'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

corrisponde un diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_k(C') \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "f'_*"] & H_k(C) \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_k(C'') \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f''_*"] & H_{k-1}(C') \arrow[r] \arrow[d, "f'_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_k(\bar{C}') \arrow[r, "\bar\alpha_*"'] & H_k(\bar{C}) \arrow[r, "\bar\beta_*"'] & H_k(\bar{C}'') \arrow[r, "\bar\partial_*"'] & H_{k-1}(\bar{C}') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Dimostrazione - Dimostriamo solo l'uguaglianza $\bar\partial_* f''_* = f'_* \partial_*$, in quanto le altre seguono dalla funtorialità di H_k. Sia $\{z''\} \in H_k(C'')$; allora

$$f'_* \partial_* (\{z''\}) = f'_* (\{\alpha^{-1}\partial\beta^{-1}(z'')\}) = \{f'\alpha^{-1}\partial\beta^{-1}(z'')\} = \{\bar\alpha^{-1} f \partial \beta^{-1}(z'')\} =$$
$$= \{\bar\alpha^{-1}\bar\partial f \beta^{-1}(z'')\} = \{\bar\alpha^{-1}\bar\partial\bar\beta^{-1} f''(z'')\} = \bar\partial_* f''_* (\{z''\}). \quad \square$$

La tecnica di "inseguimento nei diagrammi" delle dimostrazioni dei Teor. 6.2.a e b si usa anche per dimostrare il seguente "lemma dei 5":

Proposizione 6.3 - Dato un diagramma commutativo di gruppi abeliani e omomorfismi, a righe esatte,

$$\begin{tikzcd}
G_5 \arrow[r, "\alpha_5"] \arrow[d, "\gamma_5"'] & G_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "\gamma_4"'] & G_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & G_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & G_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] \\
H_5 \arrow[r, "\beta_5"'] & H_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & H_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & H_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & H_1
\end{tikzcd}$$

se γ_2 e γ_4 sono iniettivi e γ_5 è suriettivo, allora γ_3 è iniettivo,
se γ_2 e γ_4 sono suriettivi e γ_1 è iniettivo, allora γ_3 è suriettivo.
In particolare, se $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_5$ sono isomorfismi, anche γ_3 lo è. $\square$

Sfruttiamo il Teor. 6.2 per ottenere le <u>successioni di omologia relativa</u>.

Teorema 6.4 - a) Data una coppia topologica (X,A), siano $i: S(A) \to S(X)$ l'inclusione e $j: S(X) \to S(X,A)$ la proiezione a quoziente; allora vi è una successione esatta

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j_*} H_k(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

b) Per ogni mappa di coppie $f:(X,A) \to (Y,B)$, il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\partial_*"] & H_k(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_k(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_k(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{k-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "\partial'_*"'] & H_k(B) \arrow[r, "i'_*"'] & H_k(Y) \arrow[r, "j'_*"'] & H_k(Y,B) \arrow[r, "\partial'_*"'] & H_{k-1}(B) \arrow[r, "i'_*"'] & \dots
\end{tikzcd}$$

è commutativo. $\square$

Del Teor. 6.4 esistono le versioni ridotta, simpliciale, e simpliciale ridotta.

<u>Esempi</u>

(6.1) Dato un n-simplesso s $(n>0)$, calcoliamo $H_k(\bar{s},\dot{s})$; da ciò, tramite il Teor. 6.4 (simpliciale ridotto) calcoleremo $\tilde{H}_k(\dot{s})$. Per $k\neq n$, $\mathcal{S}_k(\bar{s}) = \mathcal{S}_k(\dot{s})$, perciò $\mathcal{S}_k(\bar{s},\dot{s}) = 0 = H_k(\bar{s},\dot{s})$; $\mathcal{S}_n(\bar{s})\cong \mathbb{Z}$, $\mathcal{S}_n(\dot{s})=0$, perciò $\mathcal{S}_n(\bar{s},\dot{s})\cong\mathbb{Z}\cong H_n(\bar{s},\dot{s})$. Ora, per tutti i k $\tilde{H}_k(\bar{s}) = \tilde{H}_k(|\bar{s}|)=0$, essendo $|\bar{s}| \overset{Top}{\cong} D^n$ contraibile. Perciò la successione

$$\dots\longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(\bar{s}) \xrightarrow{j_*} H_{k+1}(\bar{s},\dot{s}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_k(\dot{s}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_k(\bar{s}) \longrightarrow \dots$$

è in effetti

$$\dots\longrightarrow 0 \longrightarrow H_{k+1}(\bar{s},\dot{s}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_k(\dot{s}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

e quindi, per la Prop. 6.1,

$$\tilde{H}_k(\dot{s}) \cong H_{k+1}(\bar{s},\dot{s}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=n-1 \\ 0 & k\neq n-1 \end{cases}.$$

Segue anche che

$$\tilde{H}_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=n \\ 0 & k\neq n \end{cases}.$$

Qui si è vista l'utilità dell'omologia ridotta: con l'omologia non ridotta, sarebbe stato necessario un esame a parte del grado zero (infatti $H_0(\dot{s})\cong\mathbb{Z}\neq 0$).

(6.2) Si dimostrino, in modo analogo, le seguenti proprietà:

<u>Proposizione 6.5</u> - Per ogni spazio X, ogni punto $x_0\in X$, ogni k,

$$H_k(X,x_0)\cong\tilde{H}_k(X). \qquad \square$$

<u>Proposizione 6.6</u> - Per $A\subset B\subset X$, con $f = 1_X$ (o sue restrizioni), se $f_*^k : H_k(A)\longrightarrow H_k(B)$ e $f_*^{k-1}: H_{k-1}(A)\longrightarrow H_{k-1}(B)$ sono isomorfismi, allora $H_k(X,A)\cong H_k(X,B)$. $\square$

Nella dimostrazione della Prop. 6.6 conviene usare il lemma dei 5 (Prop. 6.3).

(6.3) Si dimostri che S^{n-1} non è un retratto di D^n, e se ne derivi il

<u>Teorema del punto fisso</u> (<u>in dimensione n</u>) - Ogni mappa $f : D^n \to D^n$ ammette punti fissi. □