4 - Proiezioni di rivestimento [S 2.1-2.6, M 6 es. 22-25, H 1.3]

Uno spazio topologico X è detto <u>localmente connesso per archi</u> se per ogni $x_0 \in X$, per ogni aperto U contenente x_0, esiste un aperto V connesso per archi tale che $x_0 \in V \subset U$. Uno spazio topologico X si dice <u>semilocalmente 1-connesso</u> se per ogni $x_0 \in X$ esiste un intorno N di x_0 tale che che $i_{\#}: \pi_1(N, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è l'omomorfismo nullo. Evidentemente ogni varietà gode di entrambe le proprietà.

Una <u>proiezione di rivestimento</u> di uno spazio X è una mappa $p: \tilde{X} \to X$ tale che ogni $x \in X$ ammette un intorno aperto U con la proprietà che $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti di $\tilde{X}$, ognuno dei quali è applicato omeomorficamente da p in U (U è <u>regolarmente ricoperto</u>). $\tilde{X}$ è detto <u>spazio di rivestimento</u> di X.

È immediato vedere che la <u>fibra di $x \in X$</u>, cioè $p^{-1}(x)$, è uno spazio discreto per ogni $x \in X$; inoltre p risulta suriettiva, ed è un omeomorfismo locale.

<u>Esempî</u>

(4.1) Si consideri S^1 come sottoinsieme del piano dei numeri complessi. Allora
$$p: \mathbb{R} \to S^1, \quad x \mapsto e^{ix}$$
è una proiezione di rivestimento.

(4.2) In modo analogo si vedono il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ come spazio di rivestimento del toro T_1 e il piano $\mathbb{E}^2$ come spazio di rivestimento del cilindro e del toro.

<u>Teorema 4.1</u> (Unicità del sollevamento) - Sia $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ una proiezione di rivestimento puntata. Sia Y uno spazio connesso e $f: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ una mappa puntata. Se vi è una mappa $f': (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ (<u>sollevamento di f</u>) tale che $pf' = f$, allora essa è unica.

Dimostrazione (traccia) - Supposta l'esistenza di due sollevamenti f' ed f'', detti A e B i sottoinsiemi di Y su cui $f'=f''$ e $f'\neq f''$ rispettivamente, $y_0 \in A \neq \emptyset$; si dimostra che A e B sono aperti e chiusi e quindi, essendo $Y = A \cup B$ connesso, è $B=\emptyset$. $\square$

Teorema 4.2 (Sollevamento dei cammini) - Sia $p:(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ come sopra. Se ω è un cammino in X con $\omega(0) = x_0$, allora vi è un cammino ω' in $\tilde{X}$ con $\omega'(0) = \tilde{x}_0$ tale che $p\,\omega' = \omega$, ed esso è unico.

Dimostrazione (traccia) - L'intervallo I viene suddiviso in modo che, per ogni lato I_j, $\omega(I_j)$ stia in un aperto regolarmente ricoperto di X; su tale aperto viene costruito un sollevamento di $\omega|_{I_j}$ compatibile con il sollevamento di $\omega|_{I_{j-1}}$ o (per $j=1$) con la condizione $\omega'(0)=\tilde{x}_0$. L'unicità viene dal Teor. 4.1. $\square$

Teorema 4.3 (Sollevamento delle omotopie) - Sia $p:(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ come sopra. Siano poi (Y, y_0) uno spazio puntato arbitrario, $f:(Y, y_0) \to (X, x_0)$ una mappa puntata che ammette un sollevamento $f':(Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Allora ogni omotopia $F: Y \times I \to X$ tale che $F|_{Y\times\{0\}} = f$ ammette un sollevamento $F': Y \times I \to \tilde{X}$ (cioè $pF' = F$) tale che $F'|_{Y\times\{0\}} = f'$. $\square$

Corollario 4.4 - $p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è iniettiva. $\square$

Si deve tener presente che i sollevamenti (più di uno, se non si pretende che sia $\omega'(0) = \tilde{x}_0$) di un cappio ω in X basato su x_0 non sono in generale cappî in $\tilde{X}$: lo sono se e solo se $[\omega] \in p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

<u>Teorema 4.5</u> (Criterio di sollevamento) - Sia $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\longrightarrow(X,x_0)$ come sopra. Siano X e Y connessi e localmente connessi per archi; $f:(Y,y_0)\longrightarrow(X,x_0)$ ammette un sollevamento $f':(Y,y_0)\longrightarrow(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ se e solo se $$f_\#(\pi_1(Y,y_0))\subset p_\#(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)).$$

<u>Dimostrazione</u> (traccia) - Se esiste il sollevamento f', allora $f_\#(\pi_1(Y,y_0))=$ $=p_\# f'_\#(\pi_1(Y,y_0))\subset p_\#(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$. Viceversa, sia verificata l'inclusione. Il sollevamento f' viene costruito per punti: per ogni $y\in Y$, sia ω un cammino da y_0 a y; allora $f\omega$ è un cammino in X da x_0 ad $f(y)$, che ammette un sollevamento $(f\omega)'$; si pone allora $f'(y)=(f\omega)'(1)$. L'ipotesi garantisce, allora, l'indipendenza di $f'(y)$ dalla scelta di ω. $\square$

Una proiezione di rivestimento $\tilde{X}\longrightarrow X$ è detta <u>rivestimento universale di X</u> se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso. Se $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\longrightarrow(X,x_0)$ e $p':(\tilde{X}',\tilde{x}_0')\longrightarrow(X,x_0)$ sono rivestimenti universali, esiste un unico omeomorfismo $\varphi:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\longrightarrow(\tilde{X}',\tilde{x}_0')$ tale che $p'\varphi=p$.

Data una proiezione di rivestimento $\tilde{X}\longrightarrow X$, si chiamano <u>trasformazioni di rivestimento</u> gli omeomorfismi $\varphi:\tilde{X}\longrightarrow\tilde{X}$ che conservano le fibre, cioè tali che $p\varphi=p$; esse formano gruppo.

<u>Proposizione 4.6</u> - Sia $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\longrightarrow(X,x_0)$ un rivestimento universale e sia $\tilde{X}$ localmente connesso per archi. Allora il gruppo di trasformazioni di rivestimento di p è canonicamente isomorfo a $\pi_1(X,x_0)$. $\square$

Teorema 1 *Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente 1-connesso, e sia $x_0 \in X$. Per ogni sottogruppo H del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ vi sono un $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e una proiezione di rivestimento $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ tali che $p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$. Inoltre, tali $\tilde{X}$ sono unici a meno di equivalenza*[1].

Traccia di dimostrazione:
Accenniamo soltanto alla costruzione dello spazio topologico $\tilde{X}$:

$$\tilde{X} = P(X, x_0)/\sim$$

- $P(X, x_0) = \{\omega : I \to X \,|\, \omega(0) = x_0\} = \{$ cammini uscenti da $x_0\}$.
- "$\sim$" identifica i cammini ω e ω' tali che $\omega(1) = \omega'(1)$ e che $[\omega \cdot \omega'^{-1}] \in H$.

- la topologia di $\tilde{X}$ è ottenuta come quoziente della "topologia compatta-aperta" su $P(X, x_0)$.

La *topologia compatta-aperta* su $P(X, x_0)$ è la topologia generata da tutti i sottoinsiemi

$$< K, U >= \{\omega \in P(X, x_0) \mid \omega(K) \subseteq U\}$$

dove K è un compatto di I e U è un aperto di X. Al variare di $K \subset I$ e di $U \subset X$ otteniamo tutti gli aperti che generano la topologia.

Nel seguito consideremo sempre spazi topologici connessi e localmente connessi per archi (e quindi localmente connessi).

[1]Cioé, se $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ e $p' : (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \to (X, x_0)$ sono rivestimenti corrispondenti allo stesso sottogruppo H, allora esiste un omeomorfismo $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$ tale che $p' \varphi = p$.

AUTOMORFISMI DI RIVESTIMENTO

Se $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ è un rivestimento, si definisce *automorfismo di rivestimento* di p ogni omeomorfismo $\Phi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tale che $p \circ \Phi = p$. Gli automorfismi di rivestimento sono quindi omeomorfismi dello spazio totale che lasciano invariate le fibre di ogni punto dello spazio base, cioè $\Phi(p^{-1}(x)) = p^{-1}(x)$, operando quindi una permutazione sui punti di ogni fibra. L'insieme degli automorfismi di rivestimento di p viene indicato con $\mathrm{Aut}(p)$, che risulta essere un gruppo rispetto alla composizione.

Ricordiamo che se $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ è un rivestimento, allora esiste una corrispondenza biunivoca naturale fra la fibra $p^{-1}(x_0)$ e le classi laterali di $p_\sharp\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right)$ in $\pi_1(X, x_0)$. La corrispondenza si ottiene prendendo un qualunque cappio σ che rappresenta una classe laterale e sollevandola rispetto a p all'arco σ' tale che $\sigma'(0) = \tilde{x}_0$. Alla classe laterale di σ viene fatto quindi corrispondere il punto $\sigma'(1)$, che appartiene a $p^{-1}(x_0)$. Quindi la cardinalità delle fibre (cioè l'ordine del rivestimento) è uguale all'indice di $p_\sharp\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right)$ in $\pi_1(X, x_0)$.

Se $x', x'' \in \tilde{X}$ sono due punti di $p^{-1}(x_0)$ allora $p_\sharp\left(\pi_1(\tilde{X}, x')\right)$ e $p_\sharp\left(\pi_1(\tilde{X}, x'')\right)$ sono sottogruppi coniugati di $\pi_1(X, x_0)$. Il coniugio è dato, in maniera non canonica, tramite il cappio $\sigma = p(\sigma')$, dove σ' è un qualunque arco da x' a x''.

Teorema 2 *(unicità degli automorfismi di rivestimento) Sia $x \in p^{-1}(x_0)$, allora esiste al più un $\Phi \in$Aut(p) tale che $\Phi(\tilde{x}_o) = x$.*

Teorema 3 *(esistenza degli automorfismi di rivestimento) Sia $x \in p^{-1}(x_0)$, allora esiste un $\Phi \in$Aut(p) tale che $\Phi(\tilde{x}_o) = x$ se e solo se $p_\sharp\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_o)\right) = p_\sharp\left(\pi_1(\tilde{X}, x)\right)$.*

Quindi la cardinalità di $\mathrm{Aut}(p)$ è minore o al più eguale all'ordine del rivestimento. Il seguente risultato lega la struttura del gruppo $\mathrm{Aut}(p)$ con quella del gruppo fondamentale dello spazio base X.

Teorema 4 *Sia* $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *un rivestimento, allora si ha*

$$\mathrm{Aut}(p) \cong N(H)/H\,,$$

dove $H = p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ *ed* $N(H)$ *è il normalizzatore di* H *nel gruppo* $\pi_1(X, x_0)$.

Ovviamente se H è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$, allora $N(H)$ coincide con $\pi_1(X, x_0)$. I rivestimenti che godono di questa proprietà sono di particolare interesse.

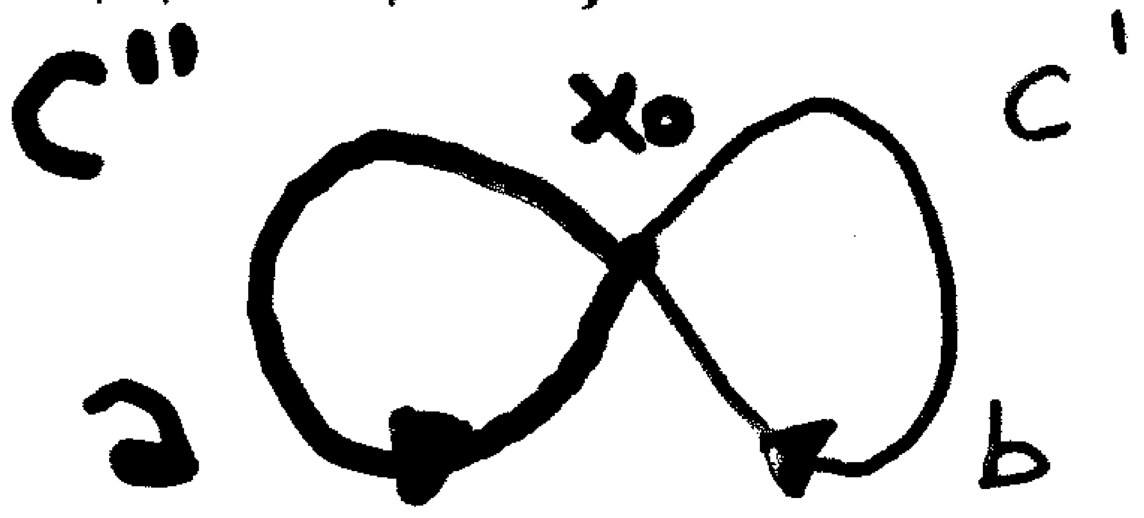
Definizione Un rivestimento $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ si dice *regolare* se $p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$.

Tutti i rivestimenti doppi (cioè di ordine due) sono regolari; infatti ogni sottogruppo di indice due è normale. Ovviamente, ogni rivestimento di uno spazio avente gruppo fondamentale abeliano (per esempio, un qualunque gruppo topologico) è regolare.

È ovvio che se p è regolare, esiste una biezione naturale fra $\mathrm{Aut}(p)$ e la fibra $p^{-1}(x_0)$, quindi la cardinalità di $\mathrm{Aut}(p)$ coincide con l'ordine del rivestimento.

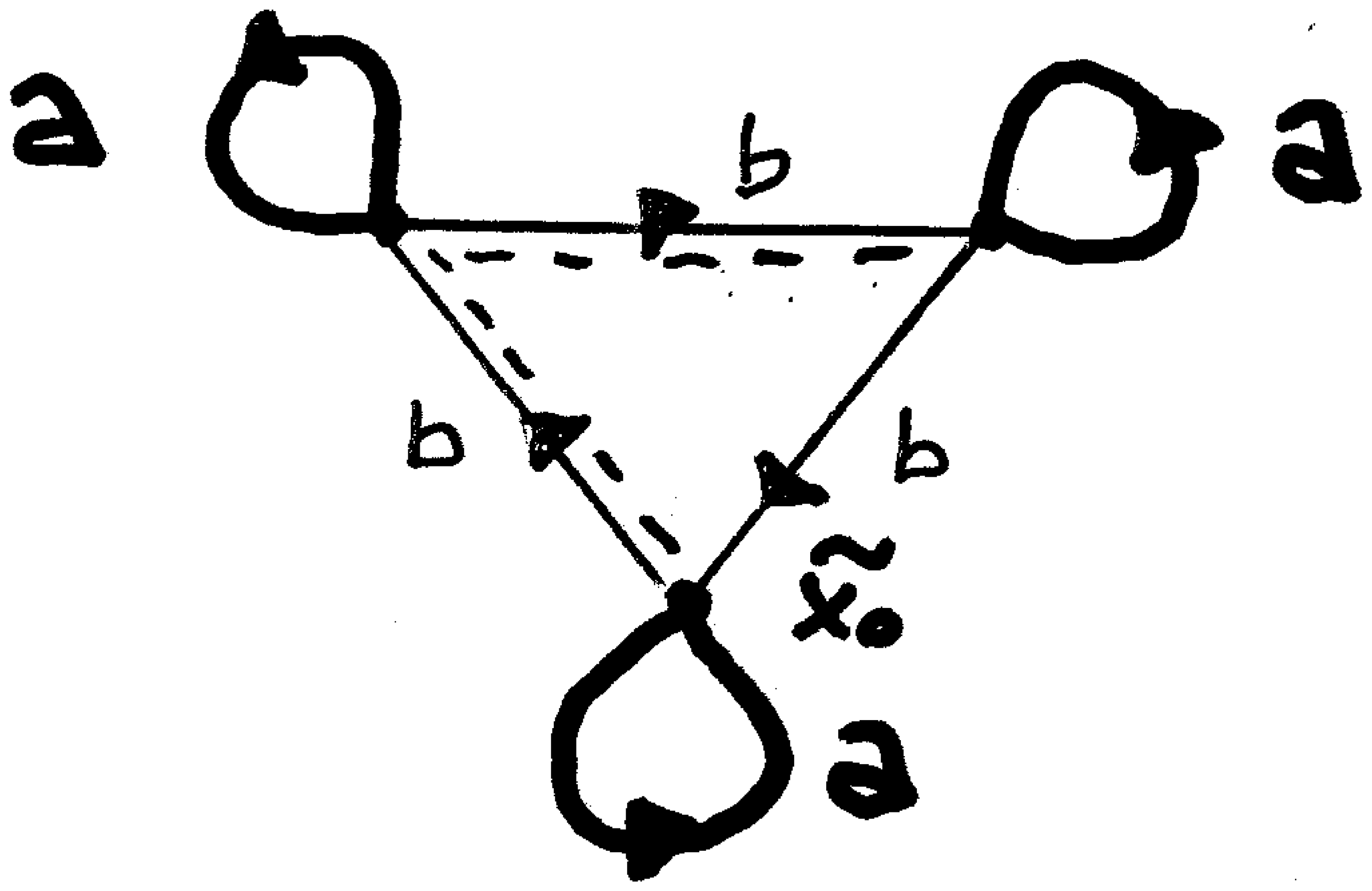
Un'altra proprietà che caratterizza i rivestimenti regolari è la seguente: i sollevamenti rispetto a p di un dato cappio ω basato in x_0, che sono tanti quanti sono i punti della fibra $p^{-1}(x_0)$, o sono tutti cappi o sono tutti archi.

Diamo ora, a titolo di esempio, due rivestimenti (uno regolare e uno no) dello *spazio "ad otto"* $X = C' \cup C''$, dove $C' = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-1| = 1\}$ e $C'' = \{z \in \mathbf{C} \mid |z+1| = 1\}$.



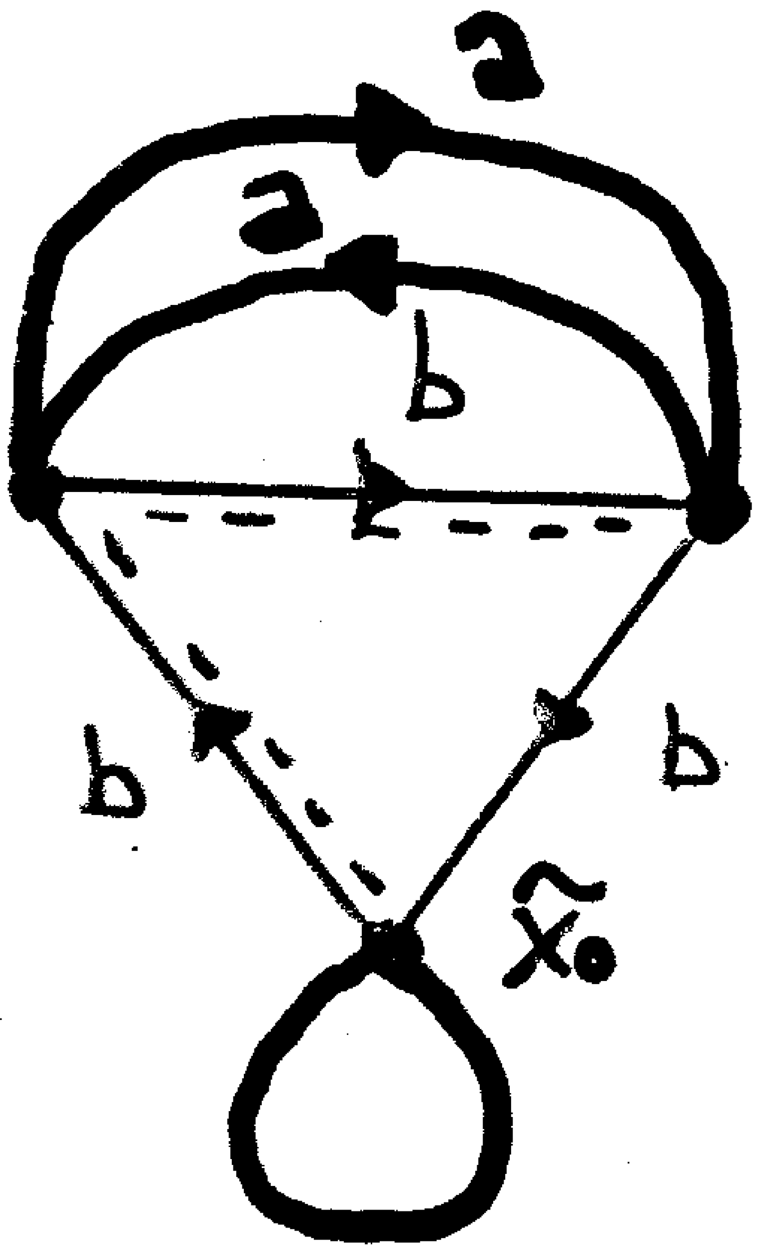
$$\pi_1(C' \cup C'', x_0) = \langle a, b \mid \phi \rangle = \mathbb{F}_2$$

♠ Un rivestimento regolare triplo dello spazio "ad otto" è:



$$H = \langle a, bab^{-1}, b^2ab^{-2}, b^3 \rangle, \quad \mathrm{Aut}(p) \cong \mathbf{Z}_3$$

♠ Un rivestimento non regolare triplo dello spazio "ad otto" è:



$$H = \langle a, bab^{-2}, b^2ab^{-1}, b^3 \rangle, \quad \mathrm{Aut}(p) = \{\,\mathrm{Id}\,\}$$

I rivestimenti regolari hanno delle buone proprietà topologiche, come emerge dal punto (*ii*) del seguente risultato.

Teorema 5 *Se* $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *è un rivestimento regolare, allora:*

(*i*) $\mathrm{Aut}(p) \cong \pi_1(X, x_0)/p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$;

(*ii*) $X \cong \tilde{X}/\mathrm{Aut}(p)$.

RIVESTIMENTI UNIVERSALI

Una proiezione di rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ è detta *universale* se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso. In tal caso $\tilde{X}$ è detto *rivestimento universale di* X.

Dal teorema di esistenza dei rivestimenti abbiamo che ogni spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente 1-connesso ammette rivestimento universale. Inoltre esso è unico, a meno di equivalenze.

Il seguente risultato fornisce un modo per calcolare il gruppo fondamentale di uno spazio, utilizzando il gruppo degli automorfismi del suo rivestimento universale.

Corollario 1 *Se* $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *è un rivestimento universale, allora:*

$$\mathrm{Aut}(\tilde{p}) \cong \pi_1(X, x_0)\,,$$

e l'isomorfismo è dato dalla mappa $\chi_{\tilde{p}} : \mathrm{Aut}(\tilde{p}) \to \pi_1(X, x_0)$, *dove* $\chi_{\tilde{p}}(\Phi)$ *e rappresentato dal cappio* $\omega = \tilde{p}(\omega')$, *essendo* ω' *un qualunque cammino da* $\tilde{x}_0$ *a* $\Phi(\tilde{x}_0)$. *Inoltre si ha*

$$X \cong \tilde{X}/\mathrm{Aut}(\tilde{p}).$$

Esempio: gli spazi proiettivi reali

- Per $n > 1$, lo spazio proiettivo reale $\mathbf{RP^n}$ ha gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbf{RP^n}) \cong \mathbf{Z_2}$. Allora $\mathbf{RP^n}$ ha come spazî di rivestimento se stesso (per $H = \pi_1(\mathbf{RP^n})$) e lo spazio di rivestimento universale $\mathbf{S^n}$ (per $H = 0$). In quest'ultimo caso il gruppo degli automorfismi di rivestimento risulta essere $\mathrm{Aut}(p) = \{\mathrm{Id}, \alpha\}$, dove $\alpha : \mathbf{S^n} \longrightarrow \mathbf{S^n}$ è la mappa antipodale definita da $\alpha(x) = -x$.

Sia $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ un rivestimento universale, K un sottogruppo di Aut$(\tilde{p})$ e $\pi : \tilde{X} \to \tilde{X}/K$ la proiezione canonica, allora la mappa $p : (\tilde{X}/K, \pi(\tilde{x}_0)) \to (X, x_0)$ tale che $\tilde{p} = p \circ \pi$, risulta essere un rivestimento. Se poi $p : (X', x'_0) \to (X, x_0)$ è un rivestimento qualunque e K è il sottogruppo di Aut$(\tilde{p})$ tale che $\chi_{\tilde{p}}(K) = p_\sharp(\pi_1(X', \tilde{x}'_0))$, allora $X' \cong \tilde{X}/K$. Quindi ogni rivestimento di B si ottiene come quoziente del suo rivestimento universale rispetto ad un opportuno gruppo di automorfismi di rivestimento.

Vediamo ora come è possibile costruire dei rivestimenti facendo agire opportuni gruppi di omeomorfismi su un dato spazio.

Definizione Un gruppo G di omeomorfismi di uno spazio topologico X si dice *propriamente discontinuo* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x tale che $g(U) \cap U = \emptyset$, per ogni $g \in G - \{Id_X\}$.

Indichiamo due classi significative di gruppi propriamente discontinui:

- gruppi finiti di omeomorfismi di spazi di Hausdorff tali che ogni elemento diverso dall'identità è privo di punti fissi;
- gruppi di automorfismi di rivestimento.

Teorema 6 *Se G è un gruppo propriamente discontinuo di omeomorfismi di uno spazio topologico X, allora, per ogni $x \in X$, la proiezione a quoziente $\pi : (X, x) \to (X/G, \pi(x))$ è un rivestimento regolare e $G =$Aut(π).*

Corollario 2 *Se X è semplicemente connesso e G è un gruppo propriamente discontinuo di omeomorfismi di X, allora:*

$$\pi_1(X/G) \cong G.$$

Esempio: gli spazi lenticolari

Si consideri la sfera tridimensionale $\mathbf{S^3} = \{(z_0, z_1) \in \mathbf{C^2} \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, e sia $\Phi_{p,q} : \mathbf{S^3} \to \mathbf{S^3}$ l'omeomorfismo definito da $\Phi_{p,q}(z_0, z_1) = (e^{2\pi i/p} z_0, e^{2\pi q i/p} z_1)$, dove p e q sono interi positivi primi fra loro con $p > q$. Allora il gruppo ciclico $G_{p,q}$ degli omeomorfismi di $\mathbf{S^3}$ generati da $\Phi_{p,q}$ ha ordine p ed è propriamente discontinuo (si osservi che gli omeomorfismi non identici di $G_{p,q}$ sono privi di punti fissi). Lo spazio quoziente $L(p,q) = \mathbf{S^3}/G_{p,q}$ è detto *spazio lenticolare* e risulta essere sempre una varietà di dimensione tre. Si noti che, essendo $\Phi_{2,1}$ la mappa antipodale, lo spazio lenticolare $L(2,1)$ è omeomorfo allo spazio proiettivo reale $\mathbf{RP^3}$. Siccome $\mathbf{S^3}$ è semplicemente connessa, si ha $\pi_1(L(p,q)) \cong \mathbf{Z_p}$. Questo implica che se $L(p',q')$ è omeomorfo a $L(p,q)$ allora necessariamente $p' = p$. Gli spazi lenticolari sono stati completamente classificati da Reidemeister nel 1932:

$$L(p,q') \cong L(p,q) \quad \Longleftrightarrow \quad q' \equiv \pm q^{\pm 1} \; mod \; p.$$