9 - *CW-complessi finiti*.

Un *CW-complesso finito* di dimensione n (*) è costituito da uno spazio topologico X e, per ogni $k \in \mathbb{N}^0_n$, da insiemi finiti (ed eventualmente vuoti, per $k \neq 0$) di mappe $\varphi^k_i : D^k \longrightarrow X$ ($i \in A_k$, opportuno insieme di indici) tali che

a) $X = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N}^0_n \\ i \in A_k}} \varphi^k_i(D^k)$;

b) $\varphi^k_i(\mathring{D}^k) \cap \varphi^h_j(\mathring{D}^h) \neq \emptyset \Longrightarrow k = h$ e $i = j$;

c) per ogni $k > 0$ e ogni i, $\varphi^k_i|_{\mathring{D}^k}$ è bicontinua sull'immagine;

d) posto $X^q = \bigcup_{\substack{0 \le k \le q \\ i \in A_k}} \varphi^k_i(D^k)$, per ogni $h \in \mathbb{N}_n$, ogni $i \in A_h$, è

$$\varphi^h_i(S^{h-1}) \subset X^{h-1}.$$

Ogni sottospazio $c^k_i = \varphi^k_i(D^k)$ è detto *k-cella* e φ^k_i ne è la *mappa caratteristica*. X^q è detto il *q-scheletro di X*. D'ora in poi, il CW-complesso verrà confuso con lo spazio X.

Un CW-complesso finito è necessariamente compatto. Ogni complesso simpliciale finito, con il suo corpo, è un CW-complesso finito.

Sia dato un CW-complesso finito X. Per ogni k fissiamo un'orientazione su D^k: questa determina, come già visto, un'orientazione su S^{k-1}, e inoltre induce tramite φ^k_{i*} un'orientazione su $X^k/(X^k - \varphi^k_i(\mathring{D}^k)) \cong S^k$ (per $k=0$ tale quoziente potrebbe essere $\cong D^0$; aggiungiamo allora un punto fittizio). Siano ora $c^k_i = \varphi^k_i(D^k)$ e $c^{k+1}_j = \varphi^{k+1}_j(D^{k+1})$; sia π^k_i la

---

(*) La definizione generale di CW-complesso si ottiene permettendo che $k \in \mathbb{N}^0$, che gli A_k siano non finiti, e imponendo le due ulteriori condizioni:

e) $Y \subset X$ è chiuso se e solo se $(\varphi^h_i)^{-1}(Y)$ è chiuso in D^h, per ogni h e i;

f) per ogni i ed h, $\varphi^h_i(D^h)$ è contenuto nell'unione di un numero finito di insiemi $\varphi^k_j(D^k)$.

proiezione $X^k \longrightarrow X^k/(X^k - \varphi_i^k(\mathring{D}^k))$ e sia

$$\bar{\varphi}_{ij}^{k+1} = \pi_i^k \varphi_j^{k+1}|_{S^k} : S^k \longrightarrow X^k/(X^k - \varphi_i^k(\mathring{D}^k)) \quad ;$$

poniamo allora $\varepsilon_{ij}^k = \deg \bar{\varphi}_{ij}^{k+1}$: la matrice $E^k = (\varepsilon_{ij}^k)_{\substack{i\in A_k \\ j\in A_{k+1}}}$ è la <u>k-esima matrice d'incidenza di X</u>.

Definendo, per ogni k, $\mathscr{C}_k(X)$ come il gruppo abeliano libero sull'insieme delle k-celle di X, e ponendo, per ogni $(k+1)$-cella c_j^{k+1}, $\partial(c_j^{k+1}) = \sum_{i\in A_k} \varepsilon_{ij}^k c_i^k$, si ottiene un complesso di catene $\mathscr{C}(X)$.

<u>Teorema 9.1</u> - Per ogni k vi è un isomorfismo canonico

$$H_k(X) \cong H_k(\mathscr{C}(X)) . \qquad \square$$

La dimostrazione è basata sull'isomorfismo $\mathscr{C}_k(X) \cong H_k(X^k, X^{k-1})$ e giunge alla tesi attraverso $H_k(X) \cong H_k(X^{k+1}, X^{k-2}) \cong H_k(\mathscr{C}(X))$.

Si noti che il Teor. 9.1 rende possibile il calcolo dell'omologia di X mediante le stesse regole del Teor. 5.11, dove ora α^k è il numero di k-celle, e con il nuovo significato di E^k.

<u>Esempi</u>.

(9.1) S^n si può presentare come un CW-complesso finito costituito da una 0-cella e una n-cella.

(9.2) Il toro T_1 si può presentare come un CW-complesso finito costituito da una 0-cella, due 1-celle e una 2-cella. Si calcoli: $H_0(T_1) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(T_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_2(T_1) \cong \mathbb{Z}$.

(9.3) $\mathbb{RP}^n$ è omeomorfo al quoziente di D^n tramite la mappa antipodale $\alpha_{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$; d'altra parte il quoziente S^{n-1}/α_{n-1} è omeomorfo a $\mathbb{RP}^{n-1}$. Ricordando che $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, si può allora presentare $\mathbb{RP}^n$ come un CW-complesso X composto da una i-cella per ogni $i \in \mathbb{N}_n^0$, da sistemare per k pari

e dove $X^i \cong \mathbb{R}P^i$; per ogni mappa caratteristica φ^i, $\varphi^i|_{S^{i-1}}$ è la proiezione $S^{i-1} \longrightarrow S^{i-1}/\alpha_{i-1}$. Calcoliamo il grado $\deg \bar{\varphi}^{k+1}$. Per classe fondamentale in S^k si può scegliere $\{z\}$, con $z = \sigma + f_k f_{k-1}(\sigma)$, dove $\sigma : (\Delta_k, \dot{\Delta}_k) \longrightarrow (E_+^k, S^{k-1})$ è biiettiva, E_+^k, f_{k-1} ed f_k sono come nella Prop. 8.4. Si può considerare $X^k/(X^k - \varphi^k(\mathring{D}^k)) \cong E_+^k/S^{k-1}$; sia $\pi : E_+^k \longrightarrow E_+^k/S^{k-1}$ la proiezione canonica. Allora, per la Prop. 8.4,

$$(\bar{\varphi}^{k+1})_*^{k}(\{z\}) = \{\pi\sigma + \pi\alpha_k f_k f_{k-1}\sigma\} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ 2\{\pi\sigma\} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Perciò $E^k = \begin{cases} (0) & \text{se } k \text{ è pari} \\ (\pm 2) & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$ (il segno $\pm$ dipende dal fatto che $\{\pi\sigma\}$ è o la classe fondamentale di E_+^k/S^{k-1} o il suo opposto). Si dimostra, così:

<u>Proposizione 9.3</u> -

$$H_k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \text{ pari}, \ 1 < k \leq n \\ \mathbb{Z}_2 & \text{per } k \text{ dispari } 1 \leq k < n \\ \mathbb{Z} & \text{per } k = n \text{ se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{per } k > n \end{cases}$$

$\square$

Da ciò si ricava anche che $\mathbb{R}P^n$ è orientabile se e solo se n è dispari.

(9.4) Analogamente, $\mathbb{C}P^n$ è un CW-complesso finito costituito da una $2k$-cella per ogni $k \in \mathbb{N}_n^0$; perciò è facile calcolare:

<u>Proposizione 9.4</u> -

$$H_k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{per } k > 2n \text{ o } k \text{ dispari} \\ \mathbb{Z} & \text{per } k \text{ pari, tale che } 0 \leq k \leq 2n. \end{cases}$$

$\square$

$\mathbb{C}P^n$ è, dunque, orientabile per ogni n.

(9.5) Si dice <u>spazio lenticolare $L(p,q)$</u> ($p > q$ interi positivi primi fra loro) lo spazio ottenuto come segue. Siano E_+, E_- gli emisferi chiusi superiore e inferiore di S^2 (rispetto al piano equatoriale $x_2 = 0$). Sia $g_{p,q} : E_+ \longrightarrow E_+$ la rotazione attorno all'asse x_2 di ampiezza $2\pi \frac{q}{p}$ e sia $f_2 : E_+ \longrightarrow E_-$

la riflessione rispetto al piano $x_2=0$. $L(p,q)$ è la varietà ottenuta da D^3 identificando $X \in E_+$ con $f_2\, g_{p,q}(X)$. $L(p,q)$ ha la struttura di un CW-complesso finito costituito da una k-cella per ogni $k \in \mathbb{N}_3^0$. Si noti che $\mathbb{RP}^3 = L(2,1)$. Si calcola:

<u>Proposizione 9.5</u> -
$$H_k(L(p,q)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0,3 \\ \mathbb{Z}_p & k=1 \\ 0 & k\neq 0,1,3\,. \end{cases} \qquad \square$$

Gli spazi lenticolari sono quindi tutti orientabili. Si noti l'indipendenza dell'omologia da q.

Si può dimostrare che il gruppo fondamentale di un CW-complesso X dipende esclusivamente da X^2 (la dimostrazione è facile se il CW-complesso è finito e si può "suddividere" fino ad ottenere una triangolazione). Il calcolo, per un CW-complesso finito X, può essere eseguito come segue. Per ogni mappa caratteristica φ_j^2, $\varphi_j^2|_{S^1}$ è un cappio in X^1; se si considerano le mappe caratteristiche φ_i^1 come cammini in X, allora $[\varphi_j^2|_{S^1}]$ si può considerare un prodotto di classi di tali cammini (includendo, se necessario, cammini costanti). Sia X connesso; per "albero massimale" di X intendiamo un sotto-CW-complesso di X^1 contenente X^0 e, come grafo, privo di cicli. La proposizione seguente estende la Prop. 3.8.

<u>Proposizione 9.6</u> - Sia A un albero massimale di X; sia G il gruppo avente per generatori le 1-celle orientate di X, e le seguenti relazioni

i) se $c_i = \varphi_i^1(D^1) \in A$, allora $c_i = 1$;

ii) per ogni 2-cella c_j^2, se $[\varphi_j^2|_{S^1}] = [\varphi_{i_1}^1]\cdot\ldots\cdot[\varphi_{i_k}^1]$, allora $c_{i_1}\cdot\ldots\cdot c_{i_k} = 1$.

Allora, per ogni $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0) \cong G$. $\square$

Esempi

(9.6) Si riottengano i gruppi fondamentali di S^n e T_1 alla luce della Prop. 9.6.

(9.7) Si verifichi che $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$ e $\pi_1(\mathbb{CP}^n) = 0$ per ogni n.

(9.8) Si verifichi che, per tutti i p e q per cui sono definiti gli spazi lenticolari, $\pi_1(L(p,q)) \cong \mathbb{Z}_p$. A questo punto, gli invarianti π_1 e H_1 ci dicono che $L(p,q) \not\cong L(p',q')$ se $p \neq p'$; ma nè π_1 nè l'omologia ci permettono di distinguere $L(p,q)$ da $L(p,q')$. La classificazione si ottiene con altri metodi ("torsione Reidemeister"), che sono al di là degli scopi di questo corso, ed è la seguente [Reidemeister 1935] ($p>1$):

$$L(p,q) \cong L(p',q') \iff p = p' \text{ e } \text{ o } q \equiv \pm q' \pmod{p} \text{ o } qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

In [Whitehead 1941] è inoltre dimostrato che

$$L(p,q) \simeq L(p',q') \iff p = p' \text{ e } \pm qq' \text{ è un residuo quadratico mod } p.$$

$L(7,1)$ e $L(7,2)$ forniscono, dunque, un esempio di varietà non omeomorfe dello stesso tipo d'omotopia.