12 - Dualità. [S6.2, M5.3, H3.3.b-3.3.c, 3.3.e]

Si dirà complesso di bolle un CW-complesso finito in cui tutte le mappe caratteristiche siano omeomorfismi sulle immagini (per esempio, i complessi simpliciali lo sono). Data una varietà combinatoria n-dimensionale finita K, costruiamo il complesso di bolle duale $\tilde{K}$ come segue. Sia $K' = \mathrm{sd}\,K$ e, per ogni simplesso s, sia $\hat{s}$ il suo baricentro. Dato un p-simplesso s^p, la $(n-p)$-bolla duale è definita:

$$(\widetilde{s^p}) = \bigcup \{ \langle \hat{s}^p_{i_p}, \ldots, \hat{s}^j_{i_j}, \ldots, \hat{s}^n_{i_n} \rangle \mid s^p = s^p_{i_p} \subset \cdots \subset s^j_{i_j} \subset \cdots \subset s^n_{i_n} \in K \}.$$

Si fissi un ordinamento totale $<$ dei vertici di K' in cui, se $s_i \subset s_j$, sia $\hat{s}_i < \hat{s}_j$. I p-simplessi di K' in cui un p-simplesso $s^p \in K$ è suddiviso non risultano coerentemente orientati (rispetto a tale ordinamento), ma, poichè $|\bar{s}^p|$ è orientabile, sarebbe possibile orientarli coerentemente, invertendo l'orientazione di alcuni di essi: a questi assegniamo coefficiente -1 in una combinazione lineare che associamo a s^p stesso. Stabiliamo in tal modo un omomorfismo iniettivo $\varphi : S_p(K) \longrightarrow S_p(K')$ per ogni p. Se $c \in S^p(K')$ è la cocatena duale, rispetto al prodotto di Kronecker, del simplesso $\langle \hat{s}^0_{i_0}, \ldots, \hat{s}^p_{i_p} \rangle$, dove $s^0_{i_0} \subset \cdots \subset s^p_{i_p} \subset s^n$, si ha che

$$\varphi(s^n) \frown c = \sum_{s^p_{i_p} \subset \cdots \subset s^{n-1}_{i_{n-1}} \subset s^n} \lambda_{i_{p+1}, \ldots, i_{n-1}} \langle \hat{s}^p_{i_p}, \ldots, \hat{s}^{n-1}_{i_{n-1}}, \hat{s}^n \rangle ,$$

dove i coefficienti sono ± 1, e il segno "orienta coerentemente" i simplessi.

Dei seguenti teoremi, validi in Top, diamo la dimostrazione nel caso PL.

Teorema 12.1 (Dualità di Poincaré) - Sia M una n-varietà chiusa, connessa, orientabile, e sia $\xi \in H_n(M)$ una classe fondamentale. Per ogni p

$$\xi \frown : H^p(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-p}(M)$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione - Sia $M=|K|$, con K varietà combinatoria e sia $h: K' \to K$ un'approssimazione simpliciale di 1_M; identifichiamo $H'(M)$ con $H'(K)$. Sia $z \in \xi$ l'n-ciclo somma di tutti gli n-simplessi di K con opportuni segni che forniscono l'orientazione coerente. Per ogni p-simplesso $s^r \in K$, detta c^r la p-cocatena duale di s^r, $\varphi(z) \frown Hom(h, 1_Z)(c^r)$ è la somma degli $(n-p)$-simplessi di K' la cui unione è la $(n-p)$-bolla $(\tilde{s}^r) \in \tilde{K}$, con segni che forniscono l'orientazione coerente.

Sussistono isomorfismi naturali $H^k(K') \cong H^k(K) \cong H^k(M)$, e $H_k(\tilde{K}) \cong H_k(M)$, perciò l'enunciato si ottiene dall'isomorfismo

$$\{\varphi(z)\} \frown_{Hom(h, 1_Z)(-)} : H^r(K) \longrightarrow H_{n-p}(\tilde{K}). \qquad \square$$

Teorema 12.2 (Dualità di Poincaré mod. 2) - Sia M una n-varietà chiusa, connessa, e sia $0 \neq \xi \in H_n(M; \mathbb{Z}_2)$. Per ogni p

$$\xi \frown : H^r(M; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_{n-p}(M; \mathbb{Z}_2)$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione - Stessa dimostrazione, senza preoccupazione di segni. $\square$

Corollario 12.3 - a) Sia M come nel Teor. 12.1. Allora, dette F_{n-p} la parte libera di $H_{n-p}(M)$ e T_{n-p-1} la parte di torsione di $H_{n-p-1}(M)$, per ogni p è

$$H_p(M) \cong F_{n-p} \oplus T_{n-p-1} .$$

b) Sia M come nel Teor. 12.2. Per ogni p

$$H_p(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_{n-p}(M; \mathbb{Z}_2).$$

Dimostrazione - Si applicano i Teor. 11.3, 12.1, 12.2, ricordando, per b), che su $\mathbb{Z}_2$, come su ogni campo, la torsione è nulla. $\square$

Esempi.

(12.1) Il Cor. 12.3 permette di completare il calcolo dell'omologia (e della coomologia) di una somma connessa di varietà chiuse e connesse.

(12.2) Lo stesso corollario implica che, per M come nel Teor. 12.1, $\chi(M)=0$ se n è dispari; un uso opportuno del Teorema dei coefficienti universali estende questo risultato a M non orientabile.

Vale, nella categoria Top, il seguente teorema, che si dimostra, nel caso PL, con tecniche analoghe alle precedenti.

<u>Teorema 12.4</u> (Dualità di Lefschetz) - Sia M una n-varietà compatta, connessa, orientabile di bordo $\dot{M}$, e sia $\xi \in H_n(M,\dot{M})$ una classe fondamentale. Per ogni p il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{p-1}(M;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\xi\frown"'] & H^{p-1}(\dot{M};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta_*"] \arrow[d, "(\partial_*\xi)\frown"'] & H^{p}(M,\dot{M};\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\xi\frown"'] & H^{p}(M;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\xi\frown"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n-p+1}(M,\dot{M}) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_{n-p}(\dot{M}) \arrow[r] & H_{n-p}(M) \arrow[r] & H_{n-p}(M,\dot{M}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

è commutativo a meno di un fattore ± 1, e i morfismi verticali sono isomorfismi

Lo stesso vale per coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ senza ipotesi di orientabilità. $\square$

Un'estensione del teorema seguente alla categoria Top è possibile, ma richiede l'uso di una diversa coomologia.

<u>Teorema 12.5</u> (Dualità di Alexander) - Sia K un complesso simpliciale, con $|K| \cong S^n$, e sia L un suo sottocomplesso. Per ogni p

$$\tilde{H}^p(|L|) \cong \tilde{H}_{n-p-1}(|K|-|L|). \quad \square$$