10 - <u>Omologia con coefficienti arbitrari</u>. [S 5.1-5.2, M 4.5, H 2.2.f]

Si ottiene un'estensione delle nozioni di complesso, mappa e omotopia di catene, nonchè di omologia di un complesso di catene, sostituendo, nelle definizioni, "R-modulo" (dove R è un anello) a "gruppo abeliano". In effetti ogni gruppo abeliano è uno $\mathbb{Z}$-modulo. I teoremi 6.1, 6.2 e 6.3 valgono anche per tale estensione. Nel seguito l'anello R sarà un dominio di ideali principali.

Ricordiamo che, se A e B sono R-moduli, il loro <u>prodotto tensoriale</u> $A\otimes B$ (scritto $A\otimes_R B$ quando vi possa essere ambiguità) è l'R-modulo definito come segue. Per ogni $a\in A$, $b\in B$, vi è un elemento $a\otimes b\in A\otimes B$; $A\otimes B$ è generato dall'insieme $\{a\otimes b \mid a\in A,\ b\in B\}$ con le relazioni (per $a,a'\in A$, $b,b'\in B$, $r,r'\in R$)

$$(ra+r'a')\otimes b = r(a\otimes b)+r'(a'\otimes b)$$
$$a\otimes(rb+r'b') = r(a\otimes b)+r'(a\otimes b');$$

se A o B è anche R'-modulo, anche $A\otimes_R B$ lo è.

Fissato A, "$A\otimes_R -$", che a B associa $A\otimes_R B$ e ad $f: B\to C$ associa $1_A\otimes f: A\otimes_R B\longrightarrow A\otimes_R C$, è un funtore covariante dalla categoria degli R-moduli e loro omomorfismi a se stessa. Altro funtore covariante, definito in modo analogo a questo, e ad esso canonicamente equivalente, è "$-\otimes_R A$".

Se $C=\left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k,\ \partial\right)$ è un complesso di catene su R (cioè i C_k sono R-moduli, e ∂ è un omomorfismo di R-moduli) e G è un R-modulo, allora $C\otimes G=\left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(C_k\otimes G),\ \partial\otimes 1_G\right)$ è un complesso di catene su R; $H_k(C;G) = H_k(C\otimes G)$ si dice <u>k-esimo modulo di omologia di C a coefficienti in G</u>. Si noti che, per un complesso di catene C su $\mathbb{Z}$, $C\otimes\mathbb{Z}\cong C$ e $H_k(C;\mathbb{Z})\cong H_k(C)$. Omologia ridotta e relativa, singolare e simpliciale, a coefficienti in G, si definiscono "tensorizzando" i rispettivi complessi di catene con G (su $\mathbb{Z}$). Si hanno successioni esatte di omologia relativa e di Mayer-Vietoris e un teorema di escissione anche con coefficienti arbitrari.

Proposizione 10.1 - Per qualsiasi varietà n-dimensionale, compatta, connessa M di bordo $\dot{M}$, $H_n(M,\dot{M};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Dimostrazione (caso $\dot{M}=\emptyset$, $M=|K|$) - La somma di tutti gli n-simplessi, tensorizzati con $\bar{1}\in\mathbb{Z}_2$, è un n-ciclo non omologo a zero; nessuna somma parziale lo è. $\square$

Una successione esatta corta $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0$ (di R-moduli e omomorfismi o di complessi di catene su R e mappe di catene) si dice spezzante se esiste un'inversa destra β' di β; in tal caso si dimostra che $A \cong A' \oplus A''$.

Proposizione 10.2.a - Data una successione esatta

$$A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0$$

e dato un R-modulo B, la successione

$$A'\otimes B \xrightarrow{\alpha\otimes 1_B} A\otimes B \xrightarrow{\beta\otimes 1_B} A''\otimes B \longrightarrow 0$$

è esatta. $\square$

La Prop. 10.2.a, che si dimostra inseguendo il diagramma, non si estende a successioni esatte corte: da $0\longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$, con $\alpha(1)=2$ e $\beta(1)=\bar{1}$, tensorizzando con $\mathbb{Z}_2$ non si ottiene una successione esatta corta. Vale però:

Proposizione 10.2.b - Data la successione esatta corta spezzante

$$0\longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0$$

e dato un R-modulo B, allora la successione

$$0\longrightarrow A'\otimes B \xrightarrow{\alpha\otimes 1_B} A\otimes B \xrightarrow{\beta\otimes 1_B} A''\otimes B \longrightarrow 0$$

è esatta e spezzante. $\square$

Come abbiamo visto, se $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow 0$ è una successione esatta corta, ma non spezzante, e L è un modulo sullo stesso anello R, allora $\operatorname{Ker} \alpha \otimes 1_L$ può essere non nullo. In particolare, se F e G sono moduli liberi, la successione data si dice essere una presentazione libera di H, e si definisce $\operatorname{Tor}(H,L) = \operatorname{Ker} \alpha \otimes 1_L$ il prodotto di torsione di H ed L; si dimostra che esso non dipende dalla particolare presentazione libera. Inoltre, se $T(H)$, $T(L)$ sono le parti di torsione di H ed L, allora $\operatorname{Tor}(H,L) \cong \operatorname{Tor}(T(H),T(L))$.

Diciamo libero un complesso di catene costituito da moduli liberi. Si ricordi che tutti i complessi di catene finora introdotti sono liberi.

Teorema 10.3 (Teorema dei coefficienti universali) - Sia C un complesso di catene libero su R e sia G un R-modulo. Vi è una successione esatta corta spezzante

$$0 \longrightarrow H_k(C) \otimes G \longrightarrow H_k(C;G) \longrightarrow \operatorname{Tor}(H_{k-1}(C),G) \longrightarrow 0$$

per ogni k.

Dimostrazione (traccia) - Costruiamo i complessi di catene $Z = \left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} Z_k(C), 0\right)$, $B = \left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \overline{B}_k, 0\right)$ con $\overline{B}_k = B_{k-1}(C)$ e omomorfismi di bordo banali; anch'essi sono liberi. Con $\alpha_k(z) = z$ e $\beta_k(c) = \partial_k c$, la successione

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

è esatta corta e spezzante (B è libero). Allora, tensorizzando con G si ha una successione esatta corta di complessi di catene e, tramite il Teor. 6.2.a, la successione

$$\dots \longrightarrow H_k(Z;G) \xrightarrow{\alpha_*} H_k(C;G) \xrightarrow{\beta_*} H_k(B;G) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(Z;G) \longrightarrow \dots$$

è esatta; ma $H_k(Z;G) = Z_k(C) \otimes G$ e $H_k(B;G) = \overline{B}_k \otimes G = B_{k-1}(C) \otimes G$; detta γ_k l'inclusione $B_k(C) \longrightarrow Z_k(C)$, si ha $\partial_* = \gamma \otimes 1_G$; da tutto ciò si ottiene la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(\gamma_k \otimes 1_G) \longrightarrow H_k(C;G) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(\gamma_{k-1} \otimes 1_G) \longrightarrow 0\,.$$

Ora, la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow B_k(C) \xrightarrow{\gamma_k} Z_k(C) \longrightarrow H_k(C) \longrightarrow 0$$

è una presentazione libera di $H_k(C)$. Per la Prop. 10.2.a, $H_k(C) \otimes G = \mathrm{Coker}\,(\gamma_k \otimes 1_G)$, e per definizione $\mathrm{Tor}\,(H_{k-1}(C), G) = \mathrm{Ker}\,(\gamma_{k-1} \otimes 1_G)$.

$\square$

Questo teorema permette di calcolare tutti i moduli di omologia a coefficienti qualsiasi, nota l'omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}$. In particolare, se G è privo di torsione (per esempio $\mathbb{Q}$, o un gruppo abeliano libero), si ha $\mathrm{Tor}\,(H_{k-1}(C), G) = 0$, e quindi $H_k(C;G) \cong H_k(C) \otimes G$. In ogni caso, essendo la successione spezzante, vale

$$H_k(C;G) \cong (H_k(C) \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}\,(H_{k-1}(C), G)\,.$$