13 - Gruppi di omotopia. [S7.2, 7.4-7.6, M6.3, 7.1-7.2, 7.4-7.5, H4.1a-4.1b, 4.2.b, 4.2.d]

Ci limitiamo ad un elenco minimo di definizioni e proprietà in teoria dell'omotopia.

Dato uno spazio puntato (X, x_0), sia, per $n>0$, $\pi_n(X, x_0)$ l'insieme delle classi d'omotopia di mappe di coppie $(I^n, \dot{I}^n) \longrightarrow (X, x_0)$. Il prodotto di due tali mappe ω, ω' è definito come

$$\omega \cdot \omega' : (I^n, \dot{I}^n) \longrightarrow (X, x_0)$$
$$(t_1, \dots, t_n) \longmapsto \begin{cases} \omega(2t_1, t_2, \dots, t_n) & 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ \omega'(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 . \end{cases}$$

Con tale operazione, che passa a quoziente rispetto all'omotopia, $\pi_n(X, x_0)$ ha struttura di gruppo ed è detto l'<u>n-esimo gruppo di omotopia di (X, x_0)</u>; $\pi_0(X, x_0)$ è l'insieme delle classi d'omotopia di mappe $(\dot{I}, 0) \longrightarrow (X, x_0)$. Con ovvie definizioni di terna topologica, di mappa di terne, e di omotopia di mappe di terne, si definisce l'<u>n-esimo gruppo di omotopia relativa di (X, A, x_0)</u>, per $n>1$ con $x_0 \in A \subset X$, come l'insieme $\pi_n(X, A, x_0)$ delle classi di omotopia di mappe di terne $(I^n, \dot{I}^n, \dot{I}^n - (\mathring{I}^{n-1} \times \{0\})) \longrightarrow (X, A, x_0)$, con la stessa definizione di prodotto; $\pi_1(X, A, x_0)$ è l'insieme delle classi d'omotopia di mappe di terne $(I, \dot{I}, 0) \longrightarrow (X, A, x_0)$.

<u>Teorema 13.1</u> - $\pi_n(X, x_0)$ per $n \geq 2$, e $\pi_n(X, A, x_0)$ per $n \geq 3$ sono abeliani. $\square$

Come nel caso $n=1$, gruppi d'omotopia di spazi o di coppie rispetto a punti base diversi, ma nella stessa componente connessa per archi di X (di A, nel caso relativo) sono isomorfi. Anzi, vi è un'azione del gruppo fondamentale su ogni gruppo d'omotopia. Spesso si tralascerà di indicare il punto base.

A mappe e mappe di coppie f corrispondono funtorialmente omomorfismi di gruppi (ma per $n=0$ e, nel caso relativo, per $n=1$, solo applicazioni) $f_{\#}$.

Nel prossimo enunciato $i_{\#}$ e $j_{\#}$ sono analoghi a i_* e j_* dell'omologia, e $\partial_{\#}$ associa alla classe di una mappa da $(I^n, \dot{I}^n, \dot{I}^n - (\mathring{I}^{n-1} \times \{0\}))$ la classe della sua restrizione a $(I^{n-1}, \dot{I}^{n-1})$.

> <u>Teorema 13.2</u> - <u>La successione di omotopia della coppia (X,A)</u>
>
> $$\cdots \longrightarrow \pi_k(A,x_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_k(X,x_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_k(X,A,x_0) \xrightarrow{\partial_{\#}} \pi_{k-1}(A,x_0) \longrightarrow \cdots$$
>
> è esatta. I morfismi corrispondenti ad una mappa di terne $(X,A,x_0) \longrightarrow (Y,B,y_0)$ danno luogo a diagrammi commutativi con l'analoga successione per (Y,B,y_0). $\square$

Una mappa $p: E \longrightarrow B$ è detta <u>fibrazione debole</u> (o <u>di Serre</u>) se, comunque dati n, una mappa $g: I^n \longrightarrow E$, e una omotopia $F: I^n \times I \longrightarrow B$ tale che $F|_{I^n \times \{0\}} = pg$, esiste un'omotopia $G: I^n \times I \longrightarrow E$ tale che $G|_{I^n \times \{0\}} = g$ e $F = pG$. (Una <u>fibrazione</u> gode della stessa proprietà di sollevamento delle omotopie rispetto a qualunque spazio, non solo rispetto agli I^n.) B si dice <u>spazio base</u>, E <u>spazio totale</u> della fibrazione (debole).

Data una fibrazione debole $p: E \longrightarrow B$, siano $b_0 \in B$, $F = p^{-1}(b_0)$ (<u>fibra</u> su b_0), $e_0 \in F$, $i: F \longrightarrow E$ la mappa d'inclusione. Poichè $p_{\#}: \pi_k(E,F,e_0) \longrightarrow \pi_k(B,b_0)$ risulta essere un isomorfismo, è ben definita la $\bar{\partial}: \pi_k(B,b_0) \longrightarrow \pi_{k-1}(F,e_0)$ data da $\bar{\partial} = \partial_{\#} p_{\#}^{-1}$.

> <u>Teorema 13.3</u> - <u>La successione di omotopia della fibrazione debole p</u>
>
> $$\cdots \longrightarrow \pi_k(F,e_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_k(E,e_0) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_k(B,b_0) \xrightarrow{\bar{\partial}} \pi_{k-1}(F,e_0) \longrightarrow \cdots$$
>
> è esatta. $\square$

Esempi.

(13.1) Per ogni spazio contraibile X, $\pi_k(X)=0$ per ogni k.
(13.2) Il Teor. 4.3 dimostra che ogni proiezione di rivestimento $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)$ è una fibrazione. Dato che $F=p^{-1}(x_0)$ è uno spazio discreto, $\pi_k(F,\tilde{x}_0)=0$ per $k\geq 1$; applicando il Teor. 13.3 si ricava che $\pi_k(\tilde{X},\tilde{x}_0)\cong\pi_k(X,x_0)$ per $k\geq 2$.
(13.3) Da quanto sopra, e dall'esistenza di una proiezione di rivestimento $p:\mathbb{R}\to S^1$ (es. 4.1), si ottiene $\pi_k(S^1)=0$ per $k\geq 2$.
(13.4) La mappa $p: \begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ (z_0,\dots,z_n) & \longmapsto & [z_0,\dots,z_n] \end{array}$ (detta anch'essa <u>mappa di Hopf</u>) è una fibrazione di fibre $F\cong S^1$. Da ciò si ha

$$\pi_k(S^{2n+1})\cong\pi_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \qquad \text{per } k\geq 3.$$

(13.5) In particolare, essendo $\mathbb{C}\mathbb{P}^1\cong S^2$, è $\pi_3(S^2)\neq 0$; perciò non vale quanto verificato per l'omologia, cioè la banalità in grado superiore alla dimensione. La determinazione dei gruppi d'omotopia delle sfere è un problema centrale della teoria.

Il legame con l'omologia è rappresentato dall'esistenza di un omomorfismo $\varphi:\pi_k(X,x_0)\longrightarrow H_k(X)$ per ogni k (<u>omomorfismo di Hurewicz</u>, si ricordi la dimostrazione del Teor. 5.8.

<u>Teorema 13.4</u> (Teorema di isomorfismo di Hurewicz) - Se $x_0\in X$, X è semplicemente connesso e vi è un $n\geq 2$ tale che $H_k(X)=0$ per $0<k<n$, allora $\pi_k(X,x_0)=0$ per $k<n$; viceversa, se vi è un $n\geq 1$ tale che $\pi_k(X,x_0)=0$ per $k<n$, allora $H_k(X)=0$ per $0<k<n$.
In entrambi i casi $\pi_n(X,x_0)\cong H_n(X)$. $\square$

Corollario della versione relativa del Teorema di isomorfismo di Hurewicz è il seguente

Teorema 13.5 (di Whitehead) - Siano X e Y connessi per archi e sia $f:(X,x_0)\longrightarrow(Y,y_0)$ una mappa.

a) Se, inoltre, X e Y sono semplicemente connessi e vi è un $n\geq 2$ tale che
$$f_*: H_k(X)\longrightarrow H_k(Y)$$
è un isomorfismo per $k<n$ e un epimorfismo per $k=n$, allora
$$f_\#: \pi_k(X,x_0)\longrightarrow \pi_k(Y,y_0)$$
è un isomorfismo per $k<n$ e un epimorfismo per $k=n$.

b) Viceversa, se esiste un $n\geq 1$ tale che $f_\#$ è un isomorfismo per $k<n$ e un epimorfismo per $k=n$, allora f_* è un isomorfismo per $k<n$ e un epimorfismo per $k=n$. $\square$

Esempio.

(13.6) Per $n>0$, dall'analogia (es. 6.1 e 7.2) e dal Teor. 13.4 si ricava:
$$\pi_k(S^n)=0 \quad \text{per } k<n, \qquad \pi_n(S^n)\cong\mathbb{Z}.$$

Il seguente teorema è lo scopo per cui i CW-complessi sono stati ideati.

Teorema 13.6 (di Whitehead) - Siano X e Y CW-complessi, e sia $f:X\longrightarrow Y$ una mappa tale che $f_\#:\pi_k(X)\longrightarrow\pi_k(Y)$ sia un isomorfismo per ogni k. Allora f è un'equivalenza omotopica. $\square$

Corollario 13.7 - Siano X e Y CW-complessi semplicemente connessi e sia $f:X\longrightarrow Y$ tale che $f_*: H_k(X)\longrightarrow H_k(Y)$ sia un isomorfismo per ogni k. Allora f è un'equivalenza omotopica. $\square$