11 - Coomologia. [S 5.4-5.6, M 5.1-5.2, H 3.1.a-3.2.a, 3.3.b]

Fissato un R-modulo B, $\mathrm{Hom}(B,-)$ (scritto, più precisamente, $\mathrm{Hom}_R(B,-)$), che ad un R-modulo A associa $\mathrm{Hom}(B,A) = \{f : B \to A \mid f$ omomorfismo di R-moduli$\}$ e a $g : A \to C$ associa

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}(1_B, g) : & \mathrm{Hom}(B,A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(B,C) \\ & f & \longmapsto & gf \end{array}$$

è un funtore covariante dalla categoria degli R-moduli e loro omomorfismi a se stessa; invece $\mathrm{Hom}(-,B)$ (o $\mathrm{Hom}_R(-,B)$) è un funtore contravariante (per $g : A \to C$ si ha

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}(g, 1_B) : & \mathrm{Hom}(C,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,B) \\ & f & \longmapsto & fg \end{array}$$

).

Proposizione 11.1 - Sia B un R-modulo.

a) Se $0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A''$ è una successione esatta di R-moduli e omomorfismi, allora la successione

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,A') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\alpha)} \mathrm{Hom}(B,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\beta)} \mathrm{Hom}(B,A'')$$

è esatta.

b) Se $A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$ è una successione esatta, allora la successione

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'',B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta,1)} \mathrm{Hom}(A,B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha,1)} \mathrm{Hom}(A',B)$$

è esatta.

c) Se $0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$ è una successione esatta corta spezzante, allora le successioni

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,A') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\alpha)} \mathrm{Hom}(B,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\beta)} \mathrm{Hom}(B,A'') \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'',B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta,1)} \mathrm{Hom}(A,B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha,1)} \mathrm{Hom}(A',B) \longrightarrow 0$$

sono esatte e spezzanti.

d) Per A, B, C R-moduli,

$$\begin{array}{rccc} - : & \mathrm{Hom}(A \otimes_R B, C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B,C)) \\ & f & \longmapsto & \bar{f} \end{array}$$

dove $(\bar{f}(a))(b) = f(a \otimes b)$ è un isomorfismo naturale di R-moduli. □

Nel seguito useremo principalmente il funtore contravariante.

Sia $0 \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow 0$ una presentazione libera dell'R-modulo H, e sia L un R-modulo. Definiamo il <u>modulo di estensione</u>: $\mathrm{Ext}(H,L) = \mathrm{Coker}\,\mathrm{Hom}(\alpha,1)$.

Un <u>complesso di cocatene</u> $C = (\underbrace{\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}}C^k, \delta)$ su R è costituito da una somma diretta di R-moduli $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C^k$, e da un <u>omomorfismo</u> (o <u>operatore</u>) <u>di cobordo</u> $\delta : \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C^k \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C^k$, dove $\delta^2 = 0$ e $\delta(C^k) \subset C^{k+1}$; <u>k-cocatene</u>, <u>k-cocicli</u> e <u>k-cobordi</u> si dicono gli elementi di C^k, di $Z^k(C) = \mathrm{Ker}\,\delta_k$, e di $B^k(C) = \mathrm{Im}\,\delta_{k-1}$ rispettivamente; $H^k(C) = \dfrac{Z^k(C)}{B^k(C)}$ è il <u>k-esimo modulo di coomologia di C</u>.

Dato un complesso di catene su R $C = (\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k, \partial)$, e dato un R-modulo G, un complesso di cocatene associato funtorialmente è $\mathrm{Hom}(C,G) = (\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C^k, \delta)$, dove $C^k = \mathrm{Hom}(C_k, G)$ e $\delta_k = \mathrm{Hom}(\partial_{k+1}, 1_G)$. Nel seguito scriveremo, dato un complesso di catene C su R, $H^k(C)$ per $H^k(\mathrm{Hom}(C,R))$.

La forma bilineare $\langle\,,\rangle : C_k \times \mathrm{Hom}(C_k, R) \longrightarrow R$ definita da $\langle z, c\rangle = c(z)$ induce una forma bilineare, detta <u>prodotto di Kronecker</u>, $\langle\,,\rangle : H_k(C) \times H^k(C) \longrightarrow R$.

Dati uno spazio topologico X e una coppia topologica (X,A), definiamo il <u>k-esimo modulo di coomologia singolare di X su R</u> $H^k(X;R) = H^k(\mathrm{Hom}(S(X),R))$, di <u>coomologia singolare ridotta</u> $\tilde{H}^k(X;R) = H^k(\mathrm{Hom}(\tilde{S}(X),R))$, di <u>coomologia singolare relativa di (X,A)</u> $H^k(X,A;R) = H^k(\mathrm{Hom}(S(X,A),R))$. Moduli di <u>coomologia simpliciale</u>, <u>simpliciale ridotta</u>, <u>simpliciale relativa</u> <u>su R</u> si definiscono in modo perfettamente analogo, così come anche i moduli di coomologia di un CW-complesso. I moduli di coomologia (e gli omomorfismi indotti da mappe e applicazioni simpliciali) costituiscono le immagini di funtori contravarianti.

Si hanno un teorema di excisione, e successioni esatte di coomologia relativa e di Mayer-Vietoris, naturalmente con gli omomorfismi "rovesciati". Inoltre vale:

<u>Teorema 11.2</u> (Teorema dei coefficienti universali per la coomologia) - Siano C un complesso di catene libero su R e G un R-modulo.
Vi sono successioni esatte corte spezzanti

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{k-1}(C), G) \longrightarrow H^k(C;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_k(C), G) \longrightarrow 0$$

e, per $H_k(C)$ finitamente generato per ogni k,

$$0 \longrightarrow H^k(C) \otimes G \longrightarrow H^k(C;G) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H^{k+1}(C), G) \longrightarrow 0 .$$

$\square$

<u>Teorema 11.3</u> - Sia C un complesso di catene libero tale che $H_{k-1}(C)$ e $H_k(C)$ siano finitamente generati. Allora, dette F_k la parte libera di $H_k(C)$ e T_{k-1} la parte di torsione di $H_{k-1}(C)$, è

$$H^k(C) \cong F_k \oplus T_{k-1} .$$

<u>Dimostrazione</u> (Solo per il caso $R = \mathbb{Z}$) - Per il Teor. 11.2,

$$H^k(C) \cong \mathrm{Ext}(H_{k-1}(C), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(H_k(C), \mathbb{Z}).$$

Ora, se $H_{k-1}(C) = F_{k-1} \oplus T_{k-1} \cong \overset{\ell}{\oplus} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{i_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{i_m}$, alla sua presentazione libera

$$0 \longrightarrow \overset{m}{\oplus} \mathbb{Z} \xrightarrow{f_{i_1} \oplus \dots \oplus f_{i_m}} \overset{\ell+m}{\oplus} \mathbb{Z} \longrightarrow \overset{\ell}{\oplus} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{i_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{i_m} \longrightarrow 0$$

dove $f_i(1) = i$, corrisponde, tramite $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z})$, a meno di isomorfismi,

$$\overset{m}{\oplus} \mathbb{Z} \xleftarrow{f_{i_1} \oplus \dots \oplus f_{i_m}} \overset{\ell+m}{\oplus} \mathbb{Z} \longleftarrow \overset{\ell}{\oplus} \mathbb{Z} \longleftarrow 0$$

in cui $\mathrm{Coker}(f_{i_1} \oplus \dots \oplus f_{i_m}) = \mathrm{Ext}(H_{k-1}(C), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{i_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{i_m} = T_{k-1}$.

Infine, $\mathrm{Hom}(F_k \oplus T_k, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(F_k, \mathbb{Z}) \cong F_k$. $\square$

Scriveremo $H^{\cdot}(X) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^k(X;R)$. Il vantaggio principale dell'uso della coomologia è la possibilità di dotare l'R-modulo $H^{\cdot}(X)$ di un prodotto che lo rende un algebra graduata (cioè il prodotto di un elemento di H^p e di uno di H^q è un elemento di H^{p+q}).

Definiamo il <u>prodotto cup</u> $\cup$ dapprima su $S^{\cdot}(X) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} S^k(X;R) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(S_k(X),R)$. A tale scopo, definiamo $\lambda_p : \Delta_p \longrightarrow \Delta_{p+q}$, $\rho_q : \Delta_q \longrightarrow \Delta_{p+q}$ come le mappe lineari determinate da $\lambda_p(a^i) = a^i$, $\rho_q(a^j) = a^{p+j}$. Ora, per ogni $c \in S^p(X)$ e per ogni $d \in S^q(X)$, definiamo $c \cup d \in S^{p+q}(X)$ ponendo, per ogni $\sigma \in S_{p+q}(X)$,

$$\langle \sigma, c \cup d \rangle = \langle \sigma\lambda_p, c\rangle \langle \sigma\rho_q, d\rangle .$$

Il prodotto $\cup : S^p(X) \times S^q(X) \longrightarrow S^{p+q}(X)$ è bilineare, associativo, e rende $S^{\cdot}(X)$ un'algebra graduata con elemento identità costituito dalla 0-cocatena 1 definita, per ogni punto $x \in X$, da $\langle x, 1\rangle = 1$. L'operatore cobordo δ è una derivazione su tale algebra, cioè

$$\delta(c \cup d) = \delta c \cup d + (-1)^p c \cup \delta d .$$

<u>Proposizione 11.4</u> - Il prodotto cup su $S^{\cdot}(X)$ induce un prodotto (ancora chiamato cup) su $H^{\cdot}(X)$, che rende $H^{\cdot}(X)$ un'algebra graduata. $\square$

Dato un complesso simpliciale K, si introducono, analogamente, le scritture $\mathcal{S}^{\cdot}(K)$ e $H^{\cdot}(K)$. Fissato un ordinamento totale dei vertici di K, per ogni $(p+q)$-simplesso $\sigma = \langle v^0, \dots, v^{p+q}\rangle$ (dove l'ordinamento indicato è quello indotto) scriviamo (cambiando il significato di λ_p e ρ_q)
$\sigma\lambda_p = \langle v^0, \dots, v^p\rangle$, $\sigma\rho_q = \langle v^p, \dots, v^{p+q}\rangle$; la definizione di $\cup$ su $\mathcal{S}^{\cdot}(K)$ è analoga a quella su $S^{\cdot}(X)$. Si noti che un cambiamento dell'ordinamento iniziale può cambiare il valore di

$\langle \sigma, c \smile d \rangle$; tuttavia, il prodotto indotto sulle classi di coomologia risulta definito indipendentemente da tale ordinamento: il prodotto cup passa al quoziente anche nel caso simpliciale, rendendo $H^{\cdot}(K)$ un'algebra graduata; questa, inoltre, è naturalmente isomorfa ad $H^{\cdot}(|K|)$.

Esempî

(11.1) Nonostante, per ogni k, sia $H^k(L(5,1)) \cong H^k(L(5,2))$, si può dimostrare, usando le algebre graduate $H^{\cdot}(L(5,1))$ e $H^{\cdot}(L(5,2))$, che questi due spazî (i cui gruppi fondamentali, inoltre, sono isomorfi (es. 9.8)) sono non omeomorfi.

(11.2) $H^{\cdot}(S^n)$ è l'algebra graduata generata da un solo elemento a di grado n, con la sola relazione $a^2 = 0$ (cioè $a \smile a = 0$).

(11.3) Osservando che $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, e considerando $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, la proiezione
$$p : S^3 \longrightarrow \mathbb{CP}^1, \quad (z_1, z_2) \longmapsto [z_1, z_2]$$
si può vedere come una mappa (che risulta non omotopa a zero) $S^3 \longrightarrow S^2$, detta mappa di Hopf, in cui $p^{-1}(\text{punto}) \cong S^1$. Analogamente si hanno mappe di Hopf $S^7 \longrightarrow S^4$ per la retta proiettiva sui quaternioni, e $S^{15} \longrightarrow S^8$ per la retta proiettiva sulle ottave di Cayley, con fibre (cioè retroimmagini dei punti) omeomorfe ad S^3 e ad S^7 rispettivamente. Sia ora $f : S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ una mappa qualsiasi; si scelgano generatori $\xi \in H^{2n-1}(S^{2n-1})$, $\eta = \{y\} \in H^n(S^n)$ (y cociclo). Poichè $\eta \smile \eta = 0$, vi sarà una $(2n-1)$-cocatena u su S^n tale che $y \smile y = \delta u$. Inoltre, $H^n(f)(\eta) \in H^n(S^{2n-1}) = 0$, perciò vi è una $(n-1)$-cocatena x su S^{2n-1} tale che $S^n(f)(y) = \delta x$. Ora $(x \smile S^n(f)(y) - S^{2n-1}(f)(u))$ è un $(2n-1)$-cociclo, uguale perciò a $\gamma \cdot \xi$ per un opportuno intero γ che dipende solo dalla classe di omotopia di f, ed è detto indice di Hopf di f. Si ha che, per n dispari, $\gamma = 0$ per ogni f; per n pari, $\gamma = 2$ per qualche f, e per $n = 2, 4, 8$ e per f mappa di Hopf, $\gamma = 1$.

Introduciamo ora il <u>prodotto cap</u> $\frown : S_{p+q}(X) \times S^p(X) \longrightarrow S_q(X)$,

$$(z, c) \longmapsto z \frown c$$

dove $z \frown c$ è l'unica q-catena tale che, per ogni q-cocatena d,

$$\langle z \frown c, d \rangle = \langle z, c \smile d \rangle .$$

<u>Proposizione 11.5</u> - Il prodotto cap induce un prodotto (ancora chiamato cap) $H_{p+q}(X) \times H^p(X) \longrightarrow H_q(X)$. $\square$

Analogamente si introduce un prodotto cap nel caso simpliciale.