RIVESTIMENTI

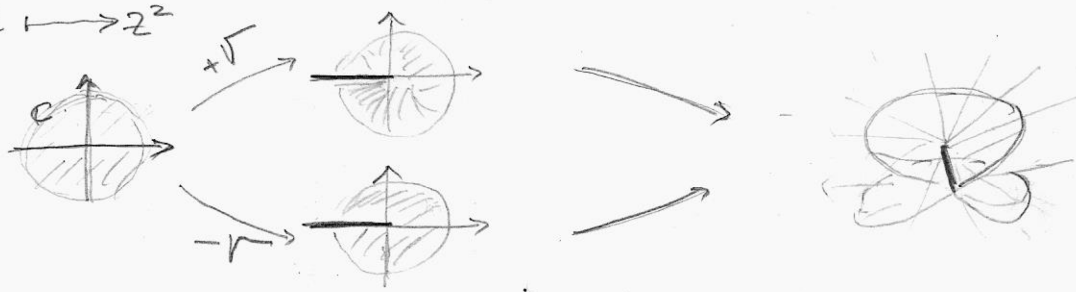
1. Motivazione e definizione

Le funzioni e trasformazioni usate in matematica anche quando non sono biunivoche, sono almeno localmente invertibili.

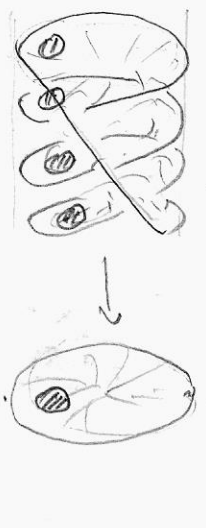
- $z \mapsto z^n$ inversa è data dalla scelta di una delle radici
- $r, \varphi \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, inversa è data dalla scelta di φ a meno di 2π
- $S^2 \to P^2$ (sfera e piano proiettivo), $(x,y,z) \mapsto [x:y:z]$, inversa dipende dalla scelta di orientazione della retta
- in genere, ogni mappa $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la cui derivata (Jacobiano) è non-singolare, è localmente invertibile

Per ovviare al problema della scelta B. Riemann ha introdotto un'idea molto originale: prendere l'insieme di tutte le scelte ed incollarle in modo da permettere un'unica scelta continua

- $z \mapsto z^2$

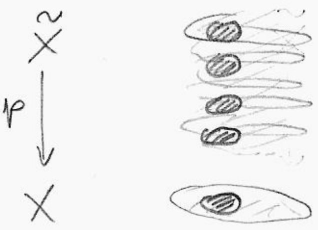


superficie di Riemann associata alla radice quadrata.



La proiezione di una superficie di Riemann sul piano complesso è molto regolare (tranne l'origine): ogni piccolo disco ha come controimmagine unione disgiunta di copie di se stesso.

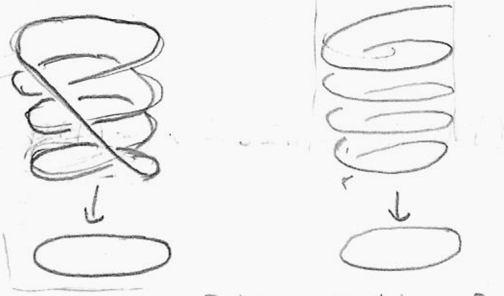
Sia $p : \tilde{X} \to X$ una mappa continua. Un aperto $U \subseteq X$ è elementare per p, se $p^{-1}(U) \subseteq \tilde{X}$ è unione disgiunta di aperti in $\tilde{X}$ che p mappa omeomorficamente su U



Se X può essere coperto da aperti che sono elementari per p, allora $p : \tilde{X} \to X$ è una proiezione di rivestimento e $\tilde{X}$ è uno spazio di rivestimento su X.
Assumeremo inoltre che $\tilde{X}$ è connesso per archi.

Esempi

- $p : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$, $p(z) = z^n$
- $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (\cos t, \sin t)$
  (variante $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
  o perfino $p(t) = e^{2\pi i t}$)



- $p : S^2 \to P^2$, $(x, y, z) \longmapsto [x : y : z]$
- $p : \mathbb{R}^2 \to T$ (superficie toro), $p(s,t) := (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t}) \in \mathbb{C}^2$

- 

Ogni grafo di valenza 4 è rivestimento sulla figura di otto.

Per $x \in X$ abbiamo $p^{-1}(x) \in \tilde{X}$, la fibra di p sopra x.
Tutte le fibre hanno la stessa cardinalità, detta il grado del rivestimento.

2. Sollevamenti di mappe

La radice quadrata su un $A \subseteq \mathbb{C}-\{0\}$ può essere vista come una mappa $\sqrt{\ }: A \longrightarrow \mathbb{C}-\{0\}$, che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}-\{0\} \arrow[d, "(\ )^2"] \\ A \arrow[ur, dashed, "\sqrt{\ }"] \arrow[r, hook, "i"'] & \mathbb{C}-\{0\} \end{tikzcd}$$

Più generalmente, si dice sollevamento di una mappa f lungo p una mappa $\tilde{f}$, tale che $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

In questa sezione daremo una risposta completa alla domanda quando una mappa può essere sollevata lungo una proiezione di rivestimento.

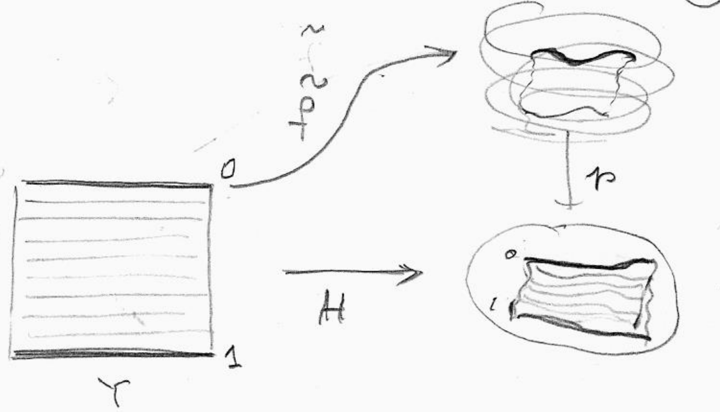
- Ogni mappa $f: Y \to X$ la cui immagine è contenuta in un aperto elementare $U \subseteq X$ può essere sollevata. Difatti, assumendo Y connesso e scegliendo $y \in Y$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(f(y))$ esiste un unico sollevamento $\tilde{f}: (Y, y) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$.

In pratica spesso costruiamo i sollevamenti partendo da un sollevamento parziale dato in anticipo. Esempio tipico è il sollevamento di un omotopia

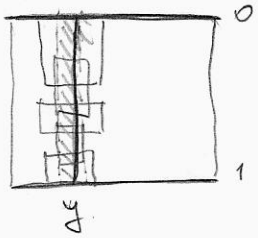
<u>Teorema</u> (sollevamento di omotopie)
Sia $\tilde{f}$ il sollevamento di f lungo una proiezione di rivestimento p. Allora per ogni omotopia H di f esiste un'unica omotopia $\tilde{H}$ di $\tilde{f}$ che è sollevamento di H lungo p.

$$\begin{tikzcd} & & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[urr, "\tilde{f}"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X \\ & Y \times I \arrow[uur, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione



- Per continuità di H possiamo ricoprire $Y \times I$ con aperti $U_\lambda \times (s_\lambda, t_\lambda)$, che vengono ciascuno mappati da H in un aperto elementare.



- Per ogni $y \in Y$ possiamo coprire il compatto $\{y\} \times I$ con un numero finito di aperti: $U_{\lambda_1} \times (s_{\lambda_1}, t_{\lambda_1}), \dots, U_{\lambda_n} \times (s_{\lambda_n}, t_{\lambda_n})$. Sia $U_y := \bigcap_1^n U_{\lambda_i}$.

  Partendo da $\tilde f$ definito su $U_y \times \{0\}$ otteniamo un estensione unica $\tilde H_y : U_y \times I \longrightarrow \tilde X$, che è sollevamento di $H|_{U_y \times I}$.

- Per l'unicità dell'estensione, se $U_y \cap U_{y'} \neq \emptyset$, allora $\tilde H_y$ e $\tilde H_{y'}$ coincidono su $(U_y \cap U_{y'}) \times I$, per cui la collezione di mappe $\{\tilde H_y\}$ definisce la mappa $\tilde H : Y \times I \longrightarrow \tilde X$ che soddisfa le richieste del teorema.

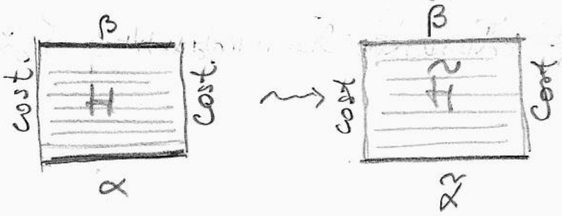
$\boxed{//}$

Nota: Dicesi *fibrazione* una mappa $p : \tilde X \longrightarrow X$ che ammette sollevamenti di omotopie partendo da un sollevamento iniziale preassegnato (senza la richiesta di unicità). Le fibrazioni sono l'oggetto principale della teoria dell'omotopia.

Ponendo $Y = \{0\}$ e $Y = [0,1]$

- Dato un cammino $\alpha : I \longrightarrow X$ e un punto $\tilde x_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$ esiste un unico sollevamento $\tilde\alpha : (I, 0) \longrightarrow (\tilde X, \tilde x_0)$ per α.
- Se $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ sono omotope (rel ∂I) allora $\tilde\alpha, \tilde\beta : (I,0) \to (\tilde X, \tilde x_0)$ sono omotope (rel ∂I) e vale $\tilde\alpha(1) = \tilde\beta(1)$.
  (Si ottiene sollevando l'omotopia tra α e β con inizio in $\tilde\alpha$. Lo stadio finale dell'omotopia sollevata deve essere $\tilde\beta$

e l'omotopia deve fissare ∂I per l'unicità dei sollevamenti)



È chiaro dove ci portano le considerazioni su cammini e omotopie (rel ∂I). Ricordiamo che il gruppo fondamentale è

$$\pi_1(X, x_0) = \{\text{mappe}: (I, \partial I) \longrightarrow (X, x_0)\} / \simeq (\text{rel } \partial I)$$

In particolare $p: (\tilde X, \tilde x_0) \to (X, x_0)$ induce $p_\#: \pi_1(\tilde X, \tilde x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

<u>Teorema</u>

Se $p: \tilde X \to X$ è una proiezione di rivestimento, allora: (1) $\operatorname{Ker} p_\# = \{1\}$

(2) $\operatorname{Im} p_\# = \{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \mid \tilde\alpha : (I, 0) \to (\tilde X, \tilde x_0),\ \tilde\alpha(1) = \tilde x_0\}$

(classi di lacci i cui sollevamenti sono lacci)

<u>Dimostrazione</u>

(1) Se per un $[\tilde\alpha] \in \pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$ abbiamo $p\tilde\alpha \simeq \text{cost}$ (rel ∂I), allora sollevando l'omotopia otteniamo $\tilde\alpha \simeq \text{cost}$ (rel ∂I).

(2) Se il sollevamento $\tilde\alpha : (I, 0) \to (\tilde X, \tilde x_0)$, di $\alpha: (I, \partial I) \to (X, x_0)$ è un laccio, allora $[\alpha] = p_\#[\tilde\alpha] \in \operatorname{Im} p_\#$.

Viceversa, se $[\alpha] \in \operatorname{Im} p_\#$ esiste un laccio $\tilde\beta : (I, \partial I) \to (\tilde X, \tilde x_0)$ tale che $\alpha \simeq p\tilde\beta$ (rel ∂I). Ma allora $\tilde\alpha \simeq \tilde\beta$ (rel ∂I), quindi il sollevamento di $\tilde\alpha$ è un laccio.

//

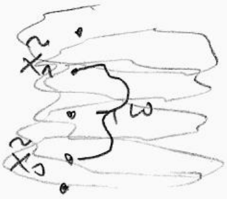
D'ora in poi identificheremo $\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$ con la sua immagine in $\pi_1(X, x_0)$, cioè $\pi_1(\tilde X, \tilde x_0) \leq \pi_1(X, x_0)$.
Possiamo chiederci come influisce la scelta del punto base $\tilde x_0 \in p^{-1}(x_0)$. La risposta è facile:

Teorema

Variando il punto base sulla fibra $p^{-1}(x_0)$ si ottiene precisamente una classe di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$.

Dimostrazione

Prendiamo un cammino ω in $\tilde X$ da $\tilde x_0$ a $\tilde x_1$.



Allora $\bar\omega := p\omega$ è un laccio e abbiamo

$\pi_1(\tilde X, \tilde x_1) = \bar\omega^{-1} \pi_1(\tilde X, \tilde x_0)\cdot \bar\omega$.

Viceversa, se ~~$G = \omega^{-1}\pi_1(X$~~ $G = \omega^{-1}\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)\cdot\omega$ rappresentiamo ω con un laccio, prendiamo il sollevamento $\tilde\omega : (I, 0) \to (\tilde X, \tilde x_0)$ e allora $G = \pi_1(\tilde X, \tilde x_1)$.

$\boxed{//}$

Un rivestimento $p: \tilde X \to X$ è <u>normale</u> se $\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$ è sottogruppo normale di $\pi_1(X, x_0)$.

Ritorniamo al problema generale di sollevamento. Una mappa (laccio) $\alpha : S^1 \to X$ ha un sollevamento se e solo se $[\alpha] \in \pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$. In effetti questo è già la risposta generale.

$$\begin{tikzcd} & (\tilde X, \tilde x_0) \arrow[d, "p"] \\ (S^1, 1) \arrow[ur, dashed, "\tilde\gamma"] \arrow[r, "\alpha"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Teorema (esistenza di sollevamenti)

Sia Y uno spazio connesso per archi e localmente connesso per archi; e sia $p: \tilde X \to X$ un rivestimento. Una mappa $f: (Y, y_0) \to (X, x_0)$ ammette un sollevamento $\tilde f : (Y, y_0) \to (\tilde X, \tilde x_0)$ se e solo se $\operatorname{Im} f_\# \leq \pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$. Inoltre, il sollevamento, se esiste, è unico.

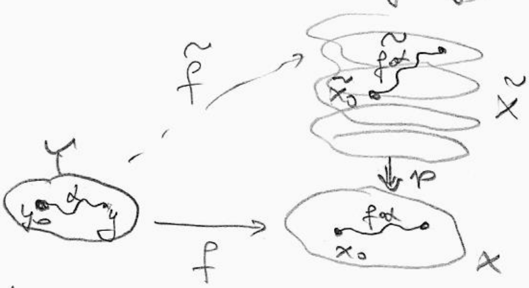
Dimostrazione

$$\begin{tikzcd} & (\tilde X, \tilde x_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\tilde f"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

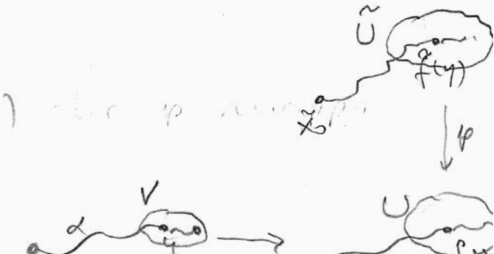
La condizione è necessaria: da $p\tilde f = f$ segue $p_\# \tilde f_\# = f_\#$ e quindi

$\operatorname{Im} f_\# \leq \operatorname{Im} p_\# = \pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$

Viceversa, per ogni $y \in Y$ scegliamo un $\alpha : (I,0,1) \to (Y, y_0, y)$ e definiamo $\tilde{f}(y) := \widetilde{f \circ \alpha}(1)$.



- scegliendo un $\beta : (I,0,1) \to (Y, y_0, y)$ alternativo, $\alpha \cdot \bar{\beta}$ è un laccio, quindi $f \circ (\alpha \cdot \bar{\beta})$ è un laccio in $\mathrm{Im}\, f_\# \leq \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Di conseguenza $\widetilde{f \circ (\alpha \cdot \bar{\beta})} = \widetilde{f \circ \alpha} \cdot \widetilde{f \circ \bar{\beta}}$ è un laccio, cioè $\widetilde{f \circ \alpha}(1) = \widetilde{f \circ \beta}(1)$. Il valore $\tilde{f}(y)$ non dipende dalla scelta di α.

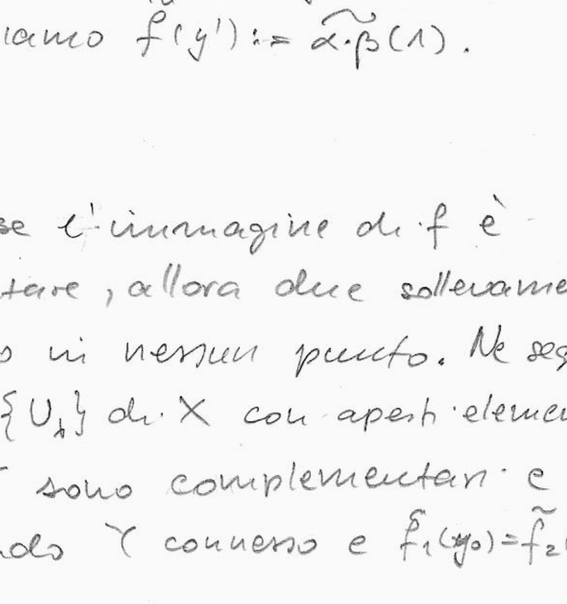


- continuità di $\tilde{f}$: sia $\tilde{U}$ intorno di $\tilde{f}(y)$ che p mappa omeomorficamente sul intorno U di $f(y)$. Y è localmente connesso per archi, per cui $f^{-1}(U)$ contiene un intorno V di y connesso per archi. Per ogni $y' \in V$ scegliamo un arco $\beta : (I,0,1) \to (V, y, y')$ e definiamo $\tilde{f}(y') := \widetilde{\alpha \cdot \beta}(1)$. Chiaramente $\tilde{f}(y') \in \tilde{U}$.

- unicità di $\tilde{f}$: osserviamo che se l'immagine di f è contenuta in un aperto elementare, allora due sollevamenti $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ di f o coincidono in tutti o in nessun punto. Ne segue che, prendendo un ricoprimento $\{U_\lambda\}$ di X con aperti elementari gli insiemi $[\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2], [\tilde{f}_1 \neq \tilde{f}_2] \subseteq Y$ sono complementari e unioni di aperti $f^{-1}(U_\lambda)$. Essendo Y connesso e $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$ concludiamo che $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

$\square$

Connessione locale è necessaria per la continuità del sollevamento



Il caso generale (non-puntato) è un semplice corollario.

Teorema

Sia Y connesso per archi e semplicemente connesso per archi. Una mappa $f: Y \to X$ può essere sollevata lungo p se e solo se per $y \in Y$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(f(y))$ arbitrari qualche sottogruppo coniugato di $f_{\#}(\pi_1(Y,y))$ è contenuto in $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})$.

$\boxed{//}$

Un caso particolare importante sono sollevamenti di mappe da spazi semplicemente connessi.

Corollario

Se Y è semplicemente connesso e localmente connesso per archi, allora ogni mappa $f: Y \to X$ può essere sollevata lungo una proiezione di rivestimento $p: \tilde{X} \to X$. Scegliendo arbitrariamente $y \in Y$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(f(y))$ esiste un unico sollevamento che manda y in $\tilde{x}$.

$\boxed{/}$

Per evitare patologie assumeremo d'ora in poi che X è localmente connesso per archi. ($\Rightarrow \tilde{X}$ è localmente connesso per archi)

3. Classificazione di rivestimenti

Abbiamo la funzione:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{proiezioni di}\\ \text{rivestimento } p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{sottogruppi}\\ \text{di } \pi_1(X,x_0)\end{array}\right\}$$

$$p \longmapsto \operatorname{Im} p_\#$$

È naturale chiedersi se la funzione è iniettiva o suriettiva.

Siano $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)$, $p':(\tilde{X}',\tilde{x}_0')\to(X,x_0)$ proiezioni di rivestimento con $\operatorname{Im} p_\# = \operatorname{Im} p'_\#$. Allora esistono sollevamenti

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X},\tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (\tilde{X}',\tilde{x}_0') \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}'"] \arrow[r, "p'"'] & (X,x_0) \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} & (\tilde{X}',\tilde{x}_0') \arrow[d, "p'"] \\ (\tilde{X},\tilde{x}_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}"] \arrow[r, "p"'] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

e per via dell'unicità

$$\tilde{p}\,\tilde{p}' = 1_{\tilde{X}'}$$
$$\tilde{p}'\,\tilde{p} = 1_{\tilde{X}}$$

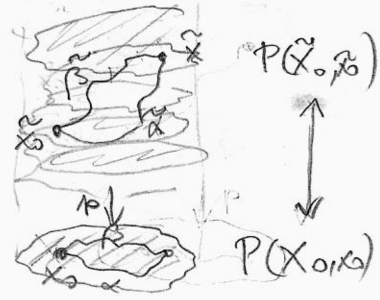
Quindi, l'uguaglianza di gruppi implica che rivestimenti sono essenzialmente uguali (diremo che sono *isomorfi*).

Esempi

- Rivestimenti $\exp: \mathbb{R}\to S^1$ e $S^1 \xrightarrow{(\ )^n} S^1$ corrispondono a sottogruppi $\{1\}$ e $n\cdot\mathbb{Z}$ di $\pi_1(S^1,1)=\mathbb{Z}$. Ne segue che questi sono (a meno di isomorfismo) tutti i rivestimenti possibili su S^1.
- $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$ che ha solo due sottogruppi: $\{1\}$ e $\mathbb{Z}_2$. Ne segue che gli unici rivestimenti su $\mathbb{P}^n$ sono $\mathrm{Id}: \mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$ e $q: S^n\to\mathbb{P}^n$.
- Spazi semplicemente connessi hanno solo un rivestimento – l'identità.

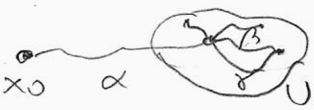
Per arrivare alla costruzione che ci dà il rivestimento corrispondente al sottogruppo $G \le \pi_1(X,x_0)$ possiamo seguire il ragionamento seguente.

Supponiamo di avere già il $p:(\tilde X,\tilde x_0)\to(X,x_0)$ con $\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)=G$. I punti $\tilde x\in\tilde X$ sono determinati da cammini in $\tilde X$ tra $\tilde x_0$ e $\tilde x$. Ma per proprietà di sollevamento unico i cammini in $P(\tilde X,\tilde x_0)=\{\text{mappe}:(I,0)\to(\tilde X,\tilde x_0)\}$ sono in corrispondenza biunivoca con $P(X,x_0)$. Due cammini $\tilde\alpha,\tilde\beta\in P(\tilde X,\tilde x_0)$ determinano lo stesso punto sse $\tilde\alpha\cdot\tilde\beta^{-1}$ è un laccio, cioè se le loro proiezioni formano un elemento $\alpha\beta^{-1}\in G$. Sfruttando la biezione tra $P(\tilde X,\tilde x_0)$ e $P(X,x_0)$ possiamo formulare questa condizione senza mai nominare i punti di $\tilde X$.



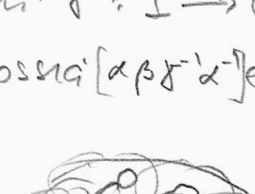
Dato un $G\le\pi_1(X,x_0)$ definiamo $\tilde X_G := P(X,x_0)/\sim_G$, dove $\alpha\sim_G\beta \iff [\alpha\cdot\bar\beta]\in G$.
La proiezione $p:\tilde X_G\to X$ è data da $p:[\alpha]\longmapsto\alpha(1)$
Ci rimane di dare una topologia a $\tilde X_G$ rispetto alla quale p sarà una proiezione di rivestimento.

Sia $\alpha\in P(X,x_0)$ e U intorno di $\alpha(1)$.
Un intorno $\langle\alpha,U\rangle$ di $[\alpha]\in\tilde X_G$ sarà formato da classi $[\alpha\cdot\beta]$ dove $\beta:(I,0)\to(U,\alpha(1))$.



Affinché $p|:\langle\tilde\alpha,U\rangle\to U$ sia una biezione la classe $[\alpha\cdot\beta]$ non deve dipendere da β, cioè per ogni $\gamma: I\to U$ con $\gamma|_{\partial I}=\beta|_{\partial I}$ deve valere $[\alpha\cdot\beta]=[\alpha\cdot\gamma]$, ossia $[\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha^{-1}]\in G$.

Dato un ricoprimento $\mathcal U$ di X definiamo
$\pi_1(\mathcal U,x_0):=\{[\alpha\gamma\alpha^{-1}] \mid \gamma$ laccio in un $U\in\mathcal U$, $\alpha:(I,0,1)\to(X,x_0,\gamma(0))\}\le\pi_1(X,x_0)$



Se X ammette un ricoprimento $\mathcal{U}$ tale che $\pi_1(\mathcal{U},x_0) \leq G$ allora per ogni $U \in \mathcal{U}$ la proiezione $p: \langle \alpha, U \rangle \longrightarrow U$ è biettiva, quindi possiamo dare a $\langle \alpha, U \rangle$ la topologia di U. Sia $\tilde{X}_G$ lo spazio la cui topologia è data dai sottospazi $\langle \alpha, U \rangle$. Allora $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ è per definizione una proiezione di rivestimento e inoltre $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) = G$.

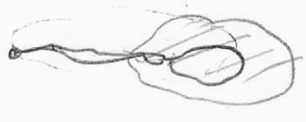
Teorema

X localmente connesso per archi, $G \leq \pi_1(X,x_0)$. Esiste una proiezione di rivestimento $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0) \longrightarrow (X,x_0)$ tale che $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) = G$ se e solo se esiste un ricoprimento $\mathcal{U}$ di X tale che $\pi_1(\mathcal{U},x_0) \leq G$.

Dimostrazione

$(\Leftarrow)$ ✓

$(\Rightarrow)$ Se U è un aperto elementare, prendendo un laccio γ in U, il sollevamento di $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ è un laccio, quindi $[\alpha\gamma\alpha^{-1}] \in G$, e $\pi_1(\mathcal{U},x_0) \leq G$, dove $\mathcal{U}$ è il ricoprimento di aperti elementari.

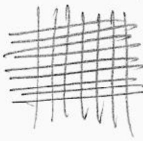


$\boxed{/\!/}$

Chiaramente, se esiste un rivestimento corrispondente al gruppo G, allora esistono rivestimenti per tutti i gruppi maggiori. Quando esiste un rivestimento per $G = \{1\}$? Se e solo se esiste un ricoprimento $\mathcal{U}$ per X, tale che $\pi_1(\mathcal{U},x_0) = \{1\}$, cioè se ogni $x \in X$ ha un intorno U tale che $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ è banale. Uno spazio è semi-localmente 1-connesso se soddisfa questa condizione.

Esempi

- Varietà, poliedri, CW complessi sono semi-localmente 1-connessi
- $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}$, anello Hawaiano non lo sono

Teorema (di classificazione)
X localmente connesso per archi
semi-localmente 1-connesso
La corrispondenza tra rivestimenti e gruppi fondamentali determina biezioni:

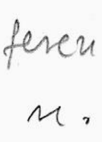
$$\left\{\begin{array}{l}\text{classi di equivalenza} \\ \text{di rivestimenti } p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{sottogruppi} \\ \text{di } \pi_1(X, x_0)\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{classi di equivalenza} \\ \text{di rivestimenti } p: \tilde{X} \to X\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{classi di coniugio} \\ \text{di sottogruppi di } \pi_1(X, x_0)\end{array}\right\}$$

$\boxtimes$

Spazi di rivestimento sono una rappresentazione geometrica della teoria dei gruppi.

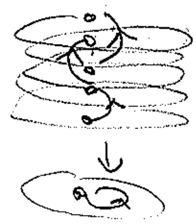
Esempio

- Sia $X =$ , unione puntata di n circonferenze. Allora $\pi_1(X) \cong F_n$, gruppo libero di rango n. Ogni $G \leq F_n$. Il rivestimento $p: \tilde{X} \to X$ che corrisponde a G è un grafo, per cui $G = \pi_1(\tilde{X})$ è libero. Questo è il famoso teorema di Nielsen–Schreier: ogni sottogruppo di un gruppo libero è libero.
- Sia $G \leq F_n$ di indice $[F_n : G] = m$. G corrisponde a un rivestimento $p: \tilde{X} \to X$ di grado m. 
$\tilde{X}$ ha m 0-celle e $m \cdot n$ 1-celle, l'albero massimale ha $(m-1)$ 1-celle, il rango di $G = \pi_1(\tilde{X})$ è
$m \cdot n - (m-1) = m \cdot (n-1) + 1$!

4. Automorfismi di rivestimenti

L'esposizione della teoria dei rivestimenti non sarebbe completa senza dare un significato geometrico ai gruppi quoziente.

Per ogni laccio $\alpha : (I, \partial I) \longrightarrow (X, x_0)$ e ogni $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ abbiamo il sollevamento $\tilde{\alpha} : (I, 0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$. Il punto finale è $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_0)$.



Così otteniamo un'azione di $\pi_1(X, x_0)$ sulla fibra $p^{-1}(x_0)$. L'azione ha una sola orbita, in altre parole è transitiva. Il stabilizzatore ~~del punto~~ $\tilde{x}_0$ è precisamente il gruppo $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Ne segue la biezione

$$\pi_1(X, x_0) \Big/ \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longleftrightarrow p^{-1}(x_0)$$

(classi laterali)

In particolare:

- $[\pi_1(X, x_0) : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)] =$ grado del rivestimento

È naturale chiedersi se è possibile estendere l'azione di $\pi_1(X, x_0)$ nei punti della fibra all'intero spazio $\tilde{X}$?

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

Un'estensione f esiste se e solo se i gruppi $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $\pi_1(\tilde{X}, f(\tilde{x}_0))$ sono coniugati.

Ne segue che $\tilde{x}_0$ può essere mappato solo ai punti che corrispondono a elementi di $\pi_1(X, x_0)$ che normalizzano il gruppo $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

<u>Automorfismo</u> del rivestimento $p: \tilde{X} \to X$ è una mappa

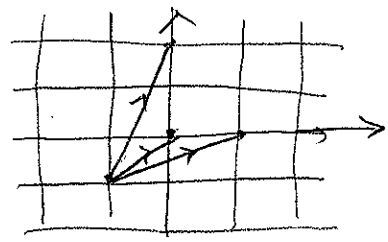
$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \tilde{X} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Gli automorfismi di p formano il gruppo $\mathrm{Aut}(p)$, degli automorfismi o delle <u>traslazioni di p</u>.

<u>Esempi</u>

- $$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{R} \arrow[dl, "p"] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$
  $p(t) = e^{2\pi i t}$.
  Da $e^{2\pi i t} = e^{2\pi i f(t)}$ segue $f(t) = t + k$ per un $k \in \mathbb{Z}$

- $p : \mathbb{R}^2 \to T^2$
  $\mathrm{Aut}(p) =$ traslazioni integrali



<u>Teorema</u>

$$\mathrm{Aut}(p) \cong N(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) / \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

$\square$

<u>Corollario</u>

Se $p: \tilde{X} \to X$ è un rivestimento normale.

(1) $$\mathrm{Aut}(p) \cong \pi_1(X, x_0) / \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longleftrightarrow p^{-1}(x_0)$$

(2) p induce l'omeomorfismo $\tilde{X}/\mathrm{Aut}(p) \approx X$.

$\square$