5 – Omologia [S 4.1-4.4, M 4.1-4.3, H 2.1.b-2.1.d]

I gruppi di omologia costituiscono altri invarianti d'omotopia; poichè esistono diverse "omologie", le definizioni e le premesse di carattere comune vengono presentate in termini puramente algebrici.

Un complesso di catene $C = \left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k , \partial\right)$ è costituito da una somma diretta di gruppi abeliani $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k$, e da un omomorfismo, detto omomorfismo (o operatore) di bordo $\partial : \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k$, dove $\partial^2 = 0$ e $\partial(C_k) \subset C_{k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Gli elementi di C_k sono detti k-catene. Un complesso di catene si può anche vedere come una successione "doppiamente infinita" di omomorfismi $\partial_i = \partial|_{C_i}$: $\ldots \leftarrow C_{k-1} \xleftarrow{\partial_k} C_k \xleftarrow{\partial_{k+1}} C_{k+1} \leftarrow \ldots$ dove $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. Poniamo $Z_k(C) = \operatorname{Ker} \partial_k$: i suoi elementi sono detti k-cicli; poniamo $B_k(C) = \operatorname{Im} \partial_{k+1}$: i suoi elementi sono detti k-bordi. La condizione $\partial^2 = 0$ implica che $B_k(C) \subset Z_k(C)$.

Chiamiamo k-esimo gruppo di omologia di C il gruppo abeliano $H_k(C) = \dfrac{Z_k(C)}{B_k(C)}$. Gli elementi di tali gruppi si chiamano classi di omologia, e cicli nella stessa classe si dicono omologhi. La classe di omologia del ciclo z è indicata con $\{z\}$.

Dati complessi di catene $C = \left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k , {}^C\partial\right)$ e $D = \left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} D_k , {}^D\partial\right)$, si dice mappa di catene un omomorfismo $f : \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} D_k$ tale che $f(C_k) \subset D_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, e tale che, posto $f_k = f|_{C_k}$, sia ${}^D\partial_k f_k = f_{k-1}\, {}^C\partial_k$; si scriverà $f : C \to D$.

Una mappa di catene $f : C \to D$ induce omomorfismi $f_*^k : H_k(C) \longrightarrow H_k(D)$, talvolta anche indicati come $H_k(f)$.

Complessi di catene e mappe di catene costituiscono una categoria; la corrispondenza H_k che associa ad ogni complesso di catene C il gruppo

$H_k(C)$ e ad ogni mappa di catene f l'omomorfismo $H_k(f) = f_*^k$ è un funtore covariante da questa categoria alla categoria dei gruppi abeliani e loro omomorfismi.

Ricordiamo che ogni gruppo abeliano finitamente generato G si scompone in una somma diretta $\overset{r}{\oplus}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{i_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{i_h}$, dove ogni <u>coefficiente di torsione</u> i_m divide i_{m+1}; r è il <u>rango</u> di G. Se $G = H_k(C)$, il suo rango β_k si dice <u>k-esimo numero di Betti di C</u>.

Date mappe di catene $f, g : C \to D$, esse si dicono <u>omotope</u> se esiste una <u>omotopia di catene</u> da f a g, cioè un omomorfismo $h : \underset{k\in\mathbb{Z}}{\oplus} C_k \longrightarrow \underset{k\in\mathbb{Z}}{\oplus} D_k$ tale che $h(C_k) \subset D_{k+1}$, e che ${}^D\partial h + h\, {}^C\partial = g - f$.

<u>Proposizione 5.1</u> - Se $f, g : C \to D$ sono mappe di catene omotope, allora $f_*^k = g_*^k$ per ogni k.

<u>Dimostrazione</u> - Sia h un'omotopia di catene da f a g, e z un k-ciclo di C; allora ${}^C\partial z = 0$, $h\,{}^C\partial z = 0$, $g(z) = f(z) + {}^D\partial h(z)$, perciò $f(z)$ e $g(z)$ sono omologhi. $\square$

Definiamo ora dei funtori da altre categorie a quella dei complessi e mappe di catene, che poi comporremo con i funtori di omologia.

In $\mathbb{E}^k$ $(k \geq 0)$, che consideriamo identificato con il sottospazio $\{x_{k+1} = 0, \ldots, x_{k+h} = 0\}$ di $\mathbb{E}^{k+h}$ per ogni $h \geq 1$, consideriamo i punti $a^0 = (0, \ldots, 0)$ e, per $i \in \mathbb{N}_k$, $a^i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}_k}$. Indichiamo con Δ_k il <u>k-simplesso standard</u> $\langle a^0, a^1, \ldots, a^k \rangle$; talvolta useremo il simbolo Δ_k anche per il complesso $\bar{\Delta}_k$.

Definiamo, per $r \in \mathbb{N}^\circ_{k+1}$, $F^k_r : \Delta_k \to \Delta_{k+1}$ come la mappa lineare determinata da $F^k_r(a^i) = \begin{cases} a^i & 0 \le i < r \\ a^{i+1} & r \le i \le k \end{cases}$.

Dato uno spazio topologico X, definiamo <u>k-simplesso singolare in X</u> qualsiasi mappa $\sigma : \Delta_k \to X$. Per $k \geq 0$, sia $S_k(X)$ il gruppo abeliano libero generato dai k-simplessi singolari in X; sia poi, per $k \geq 1$, $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ l'omomorfismo determinato da

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \sigma F^{k-1}_r$$

per ogni k-simplesso singolare σ. Posto $S_k = 0$ e $\partial_{k+1} = 0$ per $k \le -1$, è facile la verifica (raccomandata al lettore) del fatto che $\partial^2 = 0$; $S(X) = \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S_k(X), \partial\right)$ è dunque un complesso di catene. $H_k(X) = H_k(S(X))$ è il <u>k-esimo gruppo di omologia singolare di X</u>.

Si definisce anche un altro complesso di catene $\tilde{S}(X) = \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{S}_k(X), \partial\right)$, dove $\tilde{S}_k(X) = S_k(X)$ per $k \neq -1$, $\tilde{S}_{-1}(X)$ è il gruppo libero $\mathbb{Z}$ su un generatore $*$ (un "simpletto fittizio" di dimensione -1) e l'operatore di bordo coincide con il ∂ precedente, tranne che per ∂_0, definito da $\partial_0(\sigma) = *$ per ogni 0-simpletto singolare σ. I gruppi $\tilde{H}_k(X) = H_k(\tilde{S}(X))$ si chiamano gruppi di <u>omologia singolare ridotta di X</u>.

Per ogni coppia topologica (X, A), si definisce il complesso di catene $S(X,A) = \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S_k(X,A), \partial\right)$, dove $S_k(X,A) = \dfrac{S_k(X)}{S_k(A)}$ e $\partial_k : S_k(X,A) \to S_{k-1}(X,A)$ è indotto da $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$. I gruppi $H_k(X,A) = H_k(S(X,A))$ si dicono gruppi di <u>omologia singolare relativa di (X,A)</u>. Si noti che $\dfrac{S_k(X)}{S_k(A)} \cong \dfrac{\tilde{S}_k(X)}{\tilde{S}_k(A)}$, pertanto non ha senso definire separatamente una "omologia relativa ridotta"; si usa, peraltro, scrivere $H_k(X,A)$ anche come $\tilde{H}_k(X,A)$.

Nei tre casi mappe e mappe di coppie (f) inducono mappe di catene

$(S(f), \tilde{S}(f))$ fra i complessi di catene, e conseguentemente omomorfismi $(H_k(f), \tilde{H}_k(f)$, anche scritti $f^k_*)$ fra i gruppi di omologia, in modo funtoriale.

<u>Teorema 5.2</u> (Invarianza per omotopia) - Siano $f, g: X \to Y$ tali che $f \simeq g$. Allora, per ogni k, $H_k(f) = H_k(g)$, $\tilde{H}_k(f) = \tilde{H}_k(g)$; anche per $f, g: (X,A) \to (Y,B)$, $f \simeq g$, si ha $H_k(f) = H_k(g)$.

<u>Dimostrazione</u> (traccia) - Siano $i_0, i_1 : X \to X \times I$ date da $i_0(x) = (x,0)$, $i_1(x) = (x,1)$. Se dimostriamo che $H_k(i_0) = H_k(i_1)$, allora, data una omotopia $F: f \simeq g$, è

$$H_k(f) = H_k(F i_0) = H_k(F) H_k(i_0) = H_k(F) H_k(i_1) = H_k(g)$$

come richiesto.

Per dimostrare che $H_k(i_0) = H_k(i_1)$ è sufficiente, per la Prop. 5.1, esibire un'omotopia di catene P da $S(i_0)$ a $S(i_1)$, dove sarà $P(S_k(X)) \subset S_{k+1}(X \times I)$. Il "prisma" $\Delta_k \times I$ ha vertici $b^i = (a^i, 0)$ e $c^i = (a^i, 1)$ $(i \in \mathbb{N}^0_k)$; definiamo mappe lineari $E_i : \Delta_{k+1} \to \Delta_k \times I$ $(i \in \mathbb{N}^0_k)$ mediante $E_i(a^j) = \begin{cases} b^j & j \le i \\ c^{j-1} & j > i \end{cases}$. Allora l'omomorfismo P determinato definendo, per ogni k-simplesso $\sigma \in S_k(X)$,

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(S_{k+1}(\sigma \times 1_I)\right) E_i ,$$

è l'omotopia di catene cercata. In modo analogo si procede nei casi ridotto e relativo. $\square$

<u>Corollario 5.3</u> - Se $X \simeq Y$, allora $H_k(X) \cong H_k(Y)$, $\tilde{H}_k(X) \cong \tilde{H}_k(Y)$ per ogni k. Se $(X,A) \simeq (Y,B)$, allora $H_k(X,A) \cong H_k(Y,B)$ per ogni k. $\square$

<u>Proposizione 5.4</u> - Se $\{X_i\}$ è l'insieme delle componenti connesse per archi di X, allora $H_k(X) \cong \bigoplus_i H_k(X_i)$ per ogni k. Posto $A_i = A \cap X_i$, $H_k(X,A) \cong \bigoplus H_k(X_i, A_i)$. Gli isomorfismi sono canonici

Dimostrazione - Δ_j è connesso per archi; segue che $S_j(X) = \oplus_i S_j(X_i)$ e che $\partial_j(S_j(X_i)) \subset S_{j-1}(X_i)$. Considerazioni analoghe valgono nel caso relativo. $\square$

Proposizione 5.5 - a) per $k<0$, $H_k(X) \cong \tilde{H}_k(X) \cong H_k(X,A) = 0$;
b) se X ha m componenti connesse per archi, $H_0(X) \cong \bigoplus_m \mathbb{Z}$;
c) " " " " " " " " , $\tilde{H}_0(X) \cong \bigoplus_{m-1} \mathbb{Z}$.

Dimostrazione - a) Per $k \leq -2$, $S_k(X) = \tilde{S}_k(X) = S_k(X,A) = 0$; $S_{-1}(X) = S_{-1}(X,A) = 0$, e $B_{-1}(\tilde{S}(X)) = Z_{-1}(\tilde{S}(X)) = \tilde{S}_{-1}(X)$. b) $Z_0(S(X)) = S_0(X)$ è generato da tutti gli 0-simplessi singolari, che si possono identificare con i punti di X; $B_0(S(X))$ è generato dalle catene $(x_1 - x_0)$, dove x_0 e x_1 sono punti estremi di un cammino (1-simplesso singolare): $H_0(X)$ è quindi un gruppo abeliano libero i cui generatori sono in biiezione con le componenti connesse per archi di X. c) $B_0(S(X)) = B_0(\tilde{S}(X))$, ma $Z_0(\tilde{S}(X))$ è generato da tutte le catene $(x_1 - x_0)$; $\tilde{H}_0(X)$ è dunque un gruppo abeliano libero su $m-1$ generatori. $\square$

Proposizione 5.6 - Per $k>0$, $\tilde{H}_k(X) \cong H_k(X)$. $\square$

Proposizione 5.7 - Se X è contraibile, allora
a) $H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases}$, b) $\tilde{H}_k(X) = 0$ per ogni k.

Dimostrazione - a) Se X è un punto, tutti i simplessi singolari sono costanti e, per $k>0$, $B_k = Z_k$, perciò $H_k(X) = 0$; $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ per la Prop. 5.5. Il caso generale segue dal Cor. 5.3. b) segue dalle Prop. 5.5 e 5.6. $\square$

Si ricordi che, dato un gruppo G, se G' è il sottogruppo normale generato dai commutatori di G, allora G/G' è la più grande immagine omomorfa abeliana di G, e si dice anche "abelianizzazione di G".

<u>Teorema 5.8</u> – Sia X connesso per archi, $x_0 \in X$. Allora
$$H_1(X) \cong \frac{\pi_1(X, x_0)}{\pi_1'(X, x_0)} \ .$$

<u>Dimostrazione</u> (traccia) – Ricordando che un cammino in X è un 1-simplesso singolare, e notando che un cappio è un 1-ciclo, definiamo
$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow H_1(X) \\ [\gamma] &\longmapsto \{\gamma\} \end{aligned} \quad ;$$
φ risulta ben definita ed è un omomorfismo. Poichè l'immagine di φ è abeliana, φ induce un omomorfismo $\bar{\varphi} : \dfrac{\pi_1(X, x_0)}{\pi_1'(X, x_0)} \longrightarrow H_1(X)$.

Per costruire un'inversa di $\bar{\varphi}$, si scelga dapprima, per ogni $x \in X$, un cammino γ_x da x_0 a x. Definiamo
$$\begin{aligned} \psi : S_1(X) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) / \pi_1'(X, x_0) \\ \sigma &\longmapsto \text{classe di } \left(\gamma_{\sigma(0)} \cdot \sigma \cdot \gamma_{\sigma(1)}^{-1}\right) \end{aligned} \quad ;$$
dato un bordo $\partial\tau \in B_1(X)$, si ha, ponendo $\lambda_i = \tau F_i^1 \quad (i \in \mathbb{N}_2^0)$, che un rappresentante di $\psi(\partial\tau)$ è
$$\gamma_{\tau(a^1)} \cdot \lambda_0 \cdot \gamma_{\tau(a^2)}^{-1} \cdot \left(\gamma_{\tau(a^0)} \cdot \lambda_1 \cdot \gamma_{\tau(a^2)}^{-1}\right)^{-1} \cdot \gamma_{\tau(a^0)} \cdot \lambda_2 \cdot \gamma_{\tau(a^1)}^{-1} \simeq$$
$$\simeq \gamma_{\tau(a^1)} \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2 \cdot \gamma_{\tau(a^1)}^{-1} \simeq x_0 \ ,$$
perciò ψ induce una $\Psi : H_1(X) \longrightarrow \dfrac{\pi_1(X, x_0)}{\pi_1'(X, x_0)}$. Questa è l'inversa cercata. $\square$

Una difficoltà palese nel calcolo dell'omologia singolare è che solitamente i gruppi S_k, B_k, Z_k sono a infiniti generatori. Quando lo spazio o la coppia in questione siano triangolabili mediante complessi finiti, risulta allora più comodo calcolare la equivalente "omologia simpliciale".

Sia K un complesso simpliciale. Una <u>orientazione</u> su un k-simplesso s ($k>0$) è una delle due classi di permutazioni dei suoi vertici. Fissata una permutazione fondamentale dei vertici di s, i <u>simplessi orientati</u> $+s$ e $-s$ sono lo stesso s dotato rispettivamente della classe pari o dispari di permutazioni. Uno 0-simplesso orientato è uno 0-simplesso con l'attribuzione formale di un segno. La solita scrittura $s=\langle v^0,\dots,v^k\rangle$ indicherà, d'ora in poi, un simplesso orientato, cioè individuerà l'insieme dei suoi vertici e una classe di permutazioni. Per esempio: $\langle w^0,w^1\rangle=-\langle w^1,w^0\rangle$; $\langle v^0,v^1,v^2\rangle=\langle v^1,v^2,v^0\rangle=\langle v^2,v^0,v^1\rangle=-\langle v^1,v^0,v^2\rangle=-\langle v^0,v^2,v^1\rangle=-\langle v^2,v^1,v^0\rangle$.

Sia fissata, su ogni simplesso di K, un'orientazione arbitraria. Sia, per $k\geq 0$, $\mathcal{S}_k(K)$ il gruppo abeliano libero generato dai k-simplessi orientati positivamente di K. Indichiamo con $\langle v^0,\dots,\hat{v}^r,\dots,v^k\rangle$ la $(k-1)$-faccia del k-simplesso orientato $\langle v^0,\dots,v^k\rangle$ opposta a v^r, con la orientazione indotta (per esempio $\langle v^1,\hat{v}^2,v^0\rangle=\langle v^1,v^0\rangle$); sia allora, per $k\geq 1$, $\partial_k:\mathcal{S}_k(K)\longrightarrow\mathcal{S}_{k-1}(K)$ l'omomorfismo determinato da

$$\partial_k(\langle v^0,\dots,v^k\rangle)=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\langle v^0,\dots,\hat{v}^r,\dots,v^k\rangle.$$

Posto, infine, $\mathcal{S}_k(K)=0$ e $\partial_{k+1}=0$ per $k\leq -1$, si ha che $\partial^2=0$ e che $\mathcal{S}(K)=\left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{S}_k(K),\partial\right)$ è un complesso di catene. $H_k(K)=H_k(\mathcal{S}(K))$ è il <u>k-esimo gruppo di omologia simpliciale di K</u>. Come nel caso singolare, si definiscono l'omologia simpliciale ridotta e quella relativa. Ad applicazioni simpliciali e applicazioni di coppie simpliciali corrispondono funtorialmente omomorfismi fra gruppi di omologia. Le notazioni sono le stesse del caso singolare.

<u>Proposizione 5.9</u> - Se $\dim K=n$, allora $H_k(K)=0$ per $k>n$. $\square$

Fondamentale è il seguente teorema, la cui dimostrazione si basa sulla sostituzione di ogni k-simplesso singolare in $|K|$ con una approssimazione simpliciale da un'opportuna suddivisione di Δ_k a K.

<u>Teorema 5.10</u> - Dato un complesso finito K, dato un sottocomplesso L, per ogni k vi sono isomorfismi canonici

$$H_k(|K|) \cong H_k(K) \; , \; \tilde{H}_k(|K|) \cong \tilde{H}_k(K) \; , \; H_k(|K|,|L|) \cong H_k(K,L). \quad \square$$

Nel seguito K è un complesso finito n-dimensionale e α^k è il numero dei suoi k-simplessi, per ogni k. Per ogni $k \in \mathbb{N}_n$, $\partial_k : \mathcal{S}_k(K) \longrightarrow \mathcal{S}_{k-1}(K)$ si esprime mediante una matrice intera E^{k-1} di tipo (α^{k-1}, α^k), detta <u>$(k-1)$-esima matrice d'incidenza di K</u>. Da teoremi sui gruppi abeliani si ricava il teorema seguente, che rappresenta il vantaggio principale dell'uso dell'omologia simpliciale. Sia γ^i il rango della matrice E^i, se α^i e α^{i+1} sono $\neq 0$, e sia $\gamma^i = 0$ se $\alpha^i = 0$ o $\alpha^{i+1} = 0$.

<u>Teorema 5.11</u> - Per il k-esimo numero di Betti di K, $\beta_k(K)$, vale

$$\beta_k(K) = \alpha^k - \gamma^k - \gamma^{k-1} \quad ;$$

i coefficienti di torsione di $H_k(K)$ sono i fattori invarianti di E^k diversi da 1; questi mancano per $k = n$. $\square$

Sia X uno spazio topologico (risp. K un complesso simpliciale) tale che per $k > n$ sia $H_k(X) = 0$ (risp. $H_k(K) = 0$). Si definisce <u>caratteristica di Eulero</u> (o <u>di Eulero-Poincaré</u>) di X (risp. di K) il numero $\chi(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta_k(X)$ (risp. $\chi(K) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta_k(K)$). Essa è un invariante d'omotopia; inoltre, per il Teor. 5.10, $\chi(K) = \chi(|K|)$. Il seguente corollario del Teor. 5.11 offre un metodo di calcolo di χ per gli spazî triangolabili.

<u>Corollario 5.12</u> - $$\chi(K) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha^k . \quad \square$$

<u>Esempî</u> di $S^1, S^2, 8$.

(5.1) Si calcolano, mediante triangolazioni, omologia e caratteristica di Eulero