3 - Gruppo fondamentale [S 1.7-1.8, 5.6, M 3.1-3.5, Π 1.1-1.2]

Una *coppia topologica* è una coppia di spazi topologici (X, A) dove A è sottospazio di X; per una mappa di coppie $(X,A) \to (Y,B)$ si intende una mappa $f: X \to Y$ tale che $f(A) \subset B$. Coppie topologiche e mappe di coppie costituiscono una categoria. Una particolare sottocategoria è quella degli *spazi puntati* e *mappe puntate*, in cui il sottospazio A della coppia (X,A) si riduce ad un punto, che viene detto *punto base*. Un'*omotopia fra mappe di coppie* $F: f \simeq g$, dove $f, g: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ è una omotopia $F: X \times I \longrightarrow Y$, dove $F(A \times I) \subset B$.

In modo analogo si introduce la categoria delle *coppie simpliciali* e *applicazioni fra coppie simpliciali*.

Un *cammino in X*, dove X è uno spazio topologico, è una mappa $\omega: I \longrightarrow X$. Dato un cammino ω, il *cammino inverso* ω^{-1} si definisce come $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$ per ogni $t \in I$. Dati cammini ω, ω' in X, tali che $\omega(1) = \omega'(0)$, si definisce il *cammino prodotto*

$$\omega \cdot \omega' : I \longrightarrow X$$

$$t \longmapsto \begin{cases} \omega(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega'(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Proposizione 3.1 - Se $\omega \simeq \bar{\omega}$ rel $\{0,1\}$, $\omega' \simeq \bar{\omega}'$ rel $\{0,1\}$ e $\omega(1) = \omega'(0)$, $\omega \cdot \omega' \simeq \bar{\omega} \cdot \bar{\omega}'$ rel $\{0,1\}$.

Dimostrazione - Siano $F: \omega \simeq \bar{\omega}$ rel $\{0,1\}$, $F': \omega' \simeq \bar{\omega}'$ rel $\{0,1\}$ le omotopie dell'ipotesi;

$$G: I \times I \longrightarrow X$$

$$(t,s) \longmapsto \begin{cases} F(2t, s) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F'(2t-1, s) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è l'omotopia richiesta. □

Dato un cammino ω, se ne indichi con $[\omega]$ la classe di omotopia rel $\{0,1\}$. La Prop. 3.1 garantisce che il prodotto $[\omega]\cdot[\omega'] = [\omega\cdot\omega']$ è ben definito.

Un cammino ω tale che $\omega(0) = \omega(1) = x_0$ si dice <u>cappio basato su x_0</u>. Dato uno spazio puntato (X, x_0), indichiamo con $\pi_1(X, x_0)$ l'insieme $\{[\omega] \mid \omega : (I, \{0,1\}) \longrightarrow (X, x_0)\}$ delle classi di cappi basati su x_0.

<u>Proposizione 3.2</u> - $\pi_1(X, x_0)$, con l'operazione di prodotto di classi di cappi, è un gruppo.

<u>Dimostrazione</u> (traccia) - L'associatività si dimostra costruendo, per ogni terna $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ di cappi basati su x_0, una omotopia $F : (\omega_1\cdot\omega_2)\cdot\omega_3 \simeq$ $\simeq \omega_1\cdot(\omega_2\cdot\omega_3)$ rel $\{0,1\}$. L'elemento neutro è la classe del cammino costante $x_0 : t \mapsto x_0$; ciò si dimostra costruendo, per ogni cappio ω, un'omotopia $G : \omega\cdot x_0 \simeq \omega$ rel $\{0,1\}$. Per ogni classe $[\omega]$, l'elemento inverso è $[\omega^{-1}]$, come si dimostra definendo un'omotopia $H : \omega\cdot\omega^{-1} \simeq x_0$ rel $\{0,1\}$. Diamo, come esempio, una possibile H:

$$H(t,s) = \begin{cases} \omega(0) & 0 \le t \le \frac{s}{2} \\ \omega(2t-s) & \frac{s}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ \omega(2-2t-s) & \frac{1}{2} \le t \le 1 - \frac{s}{2} \\ \omega(0) & 1-\frac{s}{2} \le t \le 1 \end{cases} \qquad \square$$

Il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ si dice <u>gruppo fondamentale</u> (o <u>gruppo di Poincaré</u>, o <u>primo gruppo di omotopia</u>) <u>di X in x_0</u>.

<u>Proposizione 3.3</u> - Se A è la componente connessa per archi di X contenente x_0, allora $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0)$. $\square$

<u>Proposizione 3.4</u> - Data una mappa puntata $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, l'applicazione

$$f_\# : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0), \qquad [\omega] \longmapsto [f\omega]$$

è un omomorfismo di gruppi. $\square$

La corrispondenza che ad ogni spazio puntato (X, x_0) associa il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ e ad ogni mappa puntata f associa $f_\#$ è un funtore covariante dalla categoria degli spazî e mappe puntate alla categoria dei gruppi e omomorfismi. Talvolta si scrive $\pi_1(f)$ per $f_\#$.

<u>Proposizione 3.5</u> - Se x_0 ed y_0 appartengono alla stessa componente connessa per archi di X, allora $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, y_0)$.

<u>Dimostrazione</u> - Sia $\bar{\omega}$ un cammino in X tale che $\bar{\omega}(0) = x_0$, $\bar{\omega}(1) = y_0$. Allora

$$g : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, y_0)$$
$$[\omega] \longmapsto [\bar{\omega}^{-1} \cdot \omega \cdot \bar{\omega}]$$

è un isomorfismo. $\square$

Se X è uno spazio connesso per archi, la Prop. 3.5 garantisce che è ben definito, a meno di isomorfismi, un solo gruppo indipendente dal punto base, che viene detto <u>gruppo fondamentale di X</u> e indicato $\pi_1(X)$. La Prop. 3.6 afferma che tale gruppo è un invariante d'omotopia; esso non ha, però, carattere funtoriale.

<u>Proposizione 3.6</u> - Se X e Y sono spazî connessi per archi, e $X \simeq Y$, allora $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

<u>Dimostrazione</u> - Sia $f : X \to Y$ un'equivalenza omotopica; siano $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$. Allora $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ risulta biettiva. $\square$

Il primo esempio di uso di tecniche combinatorie in topologia è fornito dal calcolo del gruppo fondamentale di uno spazio triangolabile, mediante il "gruppo dei lati" di una sua triangolazione.

Dato un complesso K, definiamo un <u>cammino di lati in K</u> come una successione finita $\alpha = v^0, \dots, v^k$ di vertici tali che, per $i \in \mathbb{N}_k$, v^{i-1} e v^i siano o coincidenti, o vertici di uno stesso 1-simplesso di K. Un <u>cappio di</u>

lati basato su v^0 è un cammino di lati $v^0, v^1, \dots, v^k$ in cui $v^k = v^0$. Il prodotto di due cammini di lati $\alpha = v^0, \dots, v^k$ e $\beta = w^0, \dots, w^h$, dove $v^k = w^0$, è dato dalla giustapposizione $\alpha \cdot \beta = v^0, \dots, v^k, w^0, \dots, w^h$. L'inverso di un cammino di lati $\alpha = v^0, v^1, \dots, v^k$ è $\alpha^{-1} = v^k, \dots, v^1, v^0$. Due cammini di lati si dicono equivalenti se collegati da una successione finita di trasformazioni (a) o (b):

(a) se $v^{r-1} = v^r$, si sostituisca $\dots, v^{r-1}, v^r, \dots$ con $\dots, v^r, \dots$, o viceversa;

(b) se v^{r-1}, v^r, v^{r+1} generano un simplesso di K, si sostituisca $\dots, v^{r-1}, v^r, v^{r+1} \dots$ con $\dots, v^{r-1}, v^{r+1}, \dots$, o viceversa.

Questa risulta effettivamente una relazione d'equivalenza. Il prodotto di cappi di lati basati su un vertice v^0 induce un prodotto sull'insieme $E(K, v^0)$ delle classi di equivalenza, che gli conferisce struttura di gruppo: questo è chiamato il gruppo dei lati del complesso K in v^0. Evidentemente il gruppo dei lati dipende solo dal 2-scheletro K^2 di K.

Proposizione 3.7 - $\quad E(K, v^0) \cong \pi_1(|K|, v^0)$.

Dimostrazione (traccia) - Definiamo un'applicazione $\vartheta : E(K, v^0) \longrightarrow \pi_1(|K|, v^0)$ come segue: ad un cappio di lati $\alpha = v^0, \dots, v^k$ corrisponde in modo ovvio un'applicazione simpliciale φ da I, suddiviso in k lati di lunghezza $\frac{1}{k}$, a K; poniamo $\vartheta([\alpha]) = [|\varphi|]$. L'applicazione ϑ è ben definita: se α è equivalente a β, è facile vedere che i cammini, corpi delle corrispondenti applicazioni simpliciali, sono omotopi rel $\{0,1\}$.

ϑ è banalmente un omomorfismo. La suriettività di ϑ è conseguenza del Teorema di approssimazione simpliciale (Teor. 2.2). L'idea della dimostrazione dell'iniettività è la seguente.

Siano φ e φ' applicazioni simpliciali da triangolazioni di I_1 (copia di I) a K, tali che esista un'omotopia $F : I_1 \times I_2 \rightarrow |K|$, $F : |\varphi| \simeq |\varphi'|$ rel $\{0,1\}$. Esistono una suddivisione di I_2 di vertici $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_h = 1$, una suddivisione $sd^N I_1$ e applicazioni simpliciali $\varphi_1, \dots, \varphi_h : sd^N I_1 \longrightarrow K$

tali che, per ogni $i \in \mathbb{N}_h$, φ_i è approssimazione simpliciale di $F|_{I_1 \times \{t_{i-1}\}}$ e di $F|_{I_1 \times \{t_i\}}$; se ne può dedurre che i cammini di lati α_{i-1} e α_i formati dalle successioni di vertici di φ_{i-1} e φ_i sono equivalenti; per transitività sono equivalenti anche α_0 e α_h, cui corrispondono le φ e φ' iniziali. $\square$

L'isomorfismo della Prop. 3.7 è <u>canonico</u> (o <u>naturale</u>); ciò significa che ad ogni complesso puntato (K, v°) è associato un tale isomorfismo ϑ_{K,v° con la proprietà seguente. Se $\psi : (K, v^\circ) \to (L, w^\circ)$ è un'applicazione simpliciale puntata, ad essa corrispondono un omomorfismo $E(\psi) : E(K, v^\circ) \to E(L, w^\circ)$ e un omomorfismo $|\psi|_\# : \pi_1(|K|, v^\circ) \to \pi_1(|L|, w^\circ)$; allora è commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} E(K, v^\circ) \arrow[r, "E(\psi)"] \arrow[d, "\vartheta_{K,v^\circ}"'] & E(L, w^\circ) \arrow[d, "\vartheta_{L,w^\circ}"] \\ \pi_1(|K|, v^\circ) \arrow[r, "|\psi|_\#"'] & \pi_1(|L|, w^\circ) \end{tikzcd}$$

<u>Proposizione 3.8</u> - Sia A un albero massimale di K; sia G il gruppo avente per generatori gli 1-simplessi di K, orientati a piacere, e le seguenti relazioni:

i) se $\langle v, v' \rangle \in A$, allora $\langle v, v' \rangle = 1$;

ii) se v, v', v'' generano un 2-simplesso di K, allora $\langle v, v' \rangle \cdot \langle v', v'' \rangle = \langle v, v'' \rangle$.

Allora, per qualunque vertice $v^\circ \in K$, $E(K, v^\circ) \cong G$. $\square$

<u>Esempi</u>

(3.1) Si dice <u>semplicemente connesso</u> (o <u>1-connesso</u>) uno spazio topologico connesso per archi il cui gruppo fondamentale sia il gruppo banale 0. Lo spazio formato da un punto è, ovviamente, semplicemente connesso; lo sono anche, per la Prop. 3.6, tutti gli spazi contraibili (es. 2.3).

(3.2) Mediante triangolazioni, e sfruttando le Prop. 3.7 e 3.8, si può calcolare: $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, e per $n > 1$ $\pi_1(S^n) = 0$. Ciò implica anche che, per

$n>1$, $S^1 \not\cong S^n$; inoltre, ricordando l'es. 2.1 e la Prop. 3.6, $\mathbb{E}^2-\{0\} \not\cong \mathbb{E}^n-\{0\}$, e quindi $\mathbb{E}^2 \not\cong \mathbb{E}^n$ per $n>2$.

(3.3) Si trovino triangolazioni del toro T_1 e del piano proiettivo reale $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$; si verifichi che $\pi_1(T_1) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$.

(3.4) S^1 non è un retratto di D^2: supponiamo, infatti, l'esistenza di una retrazione $r: D^2 \to S^1$; si avrebbe, con $x_0 \in S^1$ e con $i: S^1 \to D^2$ inclusione, $ri = 1_{S^1}$; ma si ha $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(D^2, x_0) = 0$, e $i_\#: \mathbb{Z} \to 0$ è necessariamente banale; quindi $r_\# i_\#$ è banale, in contraddizione con $(1_{S^1})_\# = 1_{\mathbb{Z}}$.

Dall'ultimo esempio si deduce il

<u>Teorema del punto fisso</u> (di Brouwer) - Ogni mappa $f: D^2 \to D^2$ ammette almeno un punto fisso x (tale, cioè, che $f(x)=x$).

<u>Dimostrazione</u> - Supponiamo che, per ogni $x\in D^2$, sia $f(x)\neq x$; sulla retta per x ed $f(x)$ si consideri il punto $r(x)$ costituito dall'intersezione, con il bordo S^1, tale che $f(x) \notin [x, r(x)]$; allora r, che risulta continua, è una retrazione $D^2 \to S^1$, e ciò è assurdo. $\square$

Dati due gruppi finitamente presentati $G_1 = \langle a_1, \dots, a_h \mid r_1, \dots, r_k \rangle$, $G_2 = \langle b_1, \dots, b_\ell \mid s_1, \dots, s_m \rangle$, il <u>prodotto libero</u> $G_1 * G_2$ è il gruppo $\langle a_1, \dots, a_h, b_1, \dots, b_\ell \mid r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_m \rangle$. Dati gli stessi gruppi G_1, G_2, un gruppo $H = \langle c_1, \dots, c_p \mid t_1, \dots, t_q \rangle$ e omomorfismi $f_1: H \to G_1$, $f_2: H \to G_2$, il <u>prodotto di G_1 e G_2 amalgamato su (H, f_1, f_2)</u>, scritto $G_1 \underset{(H,f_1,f_2)}{*} G_2$ è il gruppo

$$\langle a_1, \dots, a_h, b_1, \dots, b_\ell \mid r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_m, f_1(c_1)(f_2(c_1))^{-1}, \dots, f_1(c_p)(f_2(c_p))^{-1} \rangle.$$

Siano ora L, M ~~due~~ sottocomplessi simpliciali finiti, di uno stesso complesso, e siano $N = L \cap M \neq \emptyset$, $K = L \cup M$; siano poi $\lambda: N \to L$, $\mu: N \to M$ le applicazioni simpliciali di inclusione.

Teorema 3.9 (di Seifert-Van Kampen) - Se $|L|, |M|, |N|$ sono connessi per archi, allora, per ogni vertice v° di N,
$$\pi_1(|K|, v^\circ) = \pi_1(|L|, v^\circ) *_{(\pi_1(|N|, v^\circ), |\lambda|_\#, |\mu|_\#)} \pi_1(|M|, v^\circ) .$$

Dimostrazione - Il calcolo viene eseguito tramite le Prop. 3.7 e 3.8.

Sia A_N un albero massimale di N; estendiamolo ad alberi massimali A_L di L ed A_M di M: $A_L \cup A_M = A_K$ è un albero massimale di K. Si ha $E(L, v^\circ) = \langle a_1, \ldots, a_h \mid r_1, \ldots, r_k \rangle$, $E(M, v^\circ) = \langle b_1, \ldots, b_\ell \mid s_1, \ldots, s_m \rangle$, dove $a_1, \ldots, a_h$ sono i lati di L, $b_1, \ldots, b_\ell$ sono i lati di M, e le relazioni sono ottenute da A_L, A_M e da L^2, M^2. Alcuni degli $\{a_i\}$, cioè i lati $c_1, \ldots, c_p$ di N, coincidono con alcuni dei $\{b_j\}$; perciò i corrispondenti generatori vanno identificati, e
$E(K, v^\circ) = \langle a_1, \ldots, a_h, b_1, \ldots, b_\ell \mid r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_m, \lambda(c_1)(\mu(c_1))^{-1}, \ldots, \lambda(c_p)(\mu(c_p))^{-1} \rangle$,
in quanto vi sono tutte le relazioni dedotte da A_K e K^2, con eventuali ripetizioni. $\square$

Corollario 3.10 - Se $|L|, |M|, |N|$ sono connessi per archi e $|N|$ è semplicemente connesso, allora
$$\pi_1(|K|, v^\circ) = \pi_1(|L|, v^\circ) * \pi_1(|M|, v^\circ). \quad \square$$

Esempi

(3.5) Il Cor. 3.10 dimostra che, per la "figura a 8" X, è $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(3.6) Considerando S^n come unione di due opposti emisferi, per $n > 1$, si riottiene, dal Teor. 3.9, $\pi_1(S^n) = 0$.

(3.7) Siano M e N due varietà PL di dimensione n. Siano $D_1^n \subset M$, $D_2^n \subset N$ corpi di sottocomplessi tali che D_1^n e D_2^n siano PL-omeomorfi a un n-simplesso. Allora $M - \mathring{D}_1^n$ e $N - \mathring{D}_2^n$ sono varietà con bordi, rispettivamente, $\dot{D}_1^n$ e $\dot{D}_2^n$ (entrambi omeomorfi a S^{n-1}). Se $f: \dot{D}_1^n \to \dot{D}_2^n$ è un omeomorfismo PL, lo spazio $(M - \mathring{D}_1) \cup_f (N - \mathring{D}_2^n)$ è una varietà con bordo vuoto. Ogni varietà così costruita si dice <u>somma connessa</u> di M ed N e si indica con $M \# N$; tuttavia, la somma così descritta non è ben definita: per $n \geq 3$ possono esistere somme connesse non (PL) omeomorfe di due date varietà. Si ha una buona definizione se si considerano varietà orientate (si veda il § 8) e f rovescia l'orientazione, oppure se M ed N sono non orientabili, indipendentemente dalla scelta di D_1^n e D_2^n in M ed N.

Si calcoli, mediante il Teor. 3.9, $\pi_1(T_2)$, dove $T_2 = T_1 \# T_1$, somma connessa di due tori.

La "bottiglia (o otre) di Klein" è la somma connessa $U_2 = U_1 \# U_1$, dove $U_1 = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$. Si calcoli $\pi_1(U_2)$.