2 - <u>Omotopia</u>. [S 1.3-1.4, 3.3-3.4, M 2.2, 2.7, M 0.1]

Dati due spazî topologici X, Y e due mappe $f, g : X \longrightarrow Y$, si dice che <u>$f$ è omotopa a g</u> (scritto $f \simeq g$) se esiste una mappa $F : X \times I \longrightarrow Y$, tale che $F|_{X\times\{0\}} = f$ e $F|_{X\times\{1\}} = g$, che si dice <u>omotopia</u> da f a g (scritto $F : f \simeq g$). La relazione di omotopia in $C^0(X, Y)$ è una relazione di equivalenza. Vi è una categoria i cui oggetti sono gli spazî topologici e i cui morfismi sono le classi di omotopia di mappe. Due spazî topologici X, Y equivalenti in questa categoria, cioè tali che esistano mappe $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ con $gf \simeq 1_X$, $fg \simeq 1_Y$, si dicono <u>omotopicamente equivalenti</u> o <u>dello stesso tipo d'omotopia</u> (scritto $X \simeq Y$) e g è detta <u>inversa omotopica</u> di f (e viceversa).

Una generalizzazione della nozione di omotopia è la seguente: siano $f, g : X \longrightarrow Y$ mappe tali che, per un certo $A \subset X$, sia $f|_A = g|_A$; un'omotopia $F : f \simeq g$ si dice <u>relativa ad A</u> (scritto $F : f \simeq g \text{ rel } A$) se, per ogni $t \in I$, $F|_{A\times\{t\}} = f|_A = g|_A$.

Un sottospazio $A \subset X$ si dice <u>retratto</u> di X se esiste una mappa (<u>retrazione</u>) $r : X \longrightarrow A$ tale che $r|_A = 1_A$; si dice <u>retratto per deformazione</u> se $ir \simeq 1_X$, dove $i : A \longrightarrow X$ è la mappa d'inclusione; si dice <u>retratto forte per deformazione</u> se $ir \simeq 1_X \text{ rel } A$. È immediato che, se A è un retratto per deformazione di X, allora $A \simeq X$.

<u>Esempî</u>

(2.1) S^n, come sottospazio di $E^{n+1} - \{0\}$, ne è retratto forte per deformazione: definiamo

$$r : E^{n+1} - \{0\} \longrightarrow S^n$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$

ed
$$F : (\mathbb{E}^{n+1} - \{0\}) \times I \longrightarrow \mathbb{E}^{n+1} - \{0\}$$
$$(x, t) \longmapsto \frac{x}{1 + t(\|x\| - 1)} \quad ;$$
risulta $F : 1_{\mathbb{E}^{n+1} - \{0\}} \simeq ir \ \text{rel}\, S^n$.

(2.2) Analogamente si dimostra che S^1 ha lo stesso tipo d'omotopia di una corona circolare e di un toro pieno.

(2.3) Si chiamano <u>contraibili</u> tutti gli spazi topologici aventi lo stesso tipo d'omotopia di un punto; ne sono esempi $\mathbb{E}^n$, D^n, e qualsiasi albero (grafo connesso privo di circuiti).

(2.4) È contraibile anche il seguente "spazio a pettine" $X \subset \mathbb{E}^2$:
$$X = (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I) \cup \left\{(u, v) \,\middle|\, 0 \leq v \leq 1,\ u = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\};$$
si può dimostrare che il punto $(0,1)$ è retratto per deformazione di X, ma non ne è retratto forte per deformazione.

Con $\text{int}|st(v,K)|$ indichiamo l'insieme $|st(v,K)| - |lk(v,K)|$.

Dati complessi K e L, ed una mappa $f : |K| \longrightarrow |L|$, una applicazione simpliciale $g : K \to L$ è detta <u>approssimazione simpliciale di f</u> se, per ogni vertice v di K, $\quad f(\text{int}|st(v,K)|) \subset \text{int}|st(g(v), L)|$.
Questa nozione costituisce il legame che permette di trattare problemi topologici mediante triangolazioni e metodi combinatori; tale legame è di tipo omotopico, come è precisato nella seguente proposizione.

<u>Proposizione 2.1</u> – Sia $g : K \longrightarrow L$ un'approssimazione simpliciale della mappa $f : |K| \longrightarrow |L|$. Allora $f \simeq |g|$ rel A, dove A è il sottospazio (eventualmente vuoto) di $|K|$ tale che $f|_A = |g||_A$.

<u>Dimostrazione</u> – Sia x un punto arbitrario di $|K|$, e sia $\langle v^0, \dots, v^k \rangle$ il simplesso supporto di x; per $i \in \mathbb{N}_k^0$ è $x \in \text{int}|st(v^i, K)|$, perciò $f(x) \in f(\text{int}|st(v^i,K)|) \subset \text{int}|st(g(v^i), L)|$. Dunque $f(x) \in$

$\in \bigcap_{i \in \mathbb{N}_k^0} \operatorname{int}|st(g(v^i),L)| \subset |st(\langle g(v^0),\ldots,g(v^k)\rangle, L)|$; naturalmente

$$|g|(x) \in \langle g(v^0),\ldots,g(v^k)\rangle \;,$$ perciò il segmento di retta congiungente $f(x)$ e $|g|(x)$ giace in $|L|$. Definendo, per ogni $(x,t) \in |K| \times I$, $\quad F(x,t) = (1-t)f(x) + t|g|(x)$ si ottiene l'omotopia voluta. $\square$

Dato, per $k>0$, un k-simplesso $\langle v^0,\ldots,v^k\rangle$, il suo baricentro è il punto $\dfrac{v^0+\cdots+v^k}{k+1}$; il baricentro di uno 0-simplesso è esso stesso. Dato un complesso K, la suddivisione baricentrica di K, $\operatorname{sd} K$, è la suddivisione di K in cui i vertici sono i baricentri dei simplessi di K, ed in cui i simplessi sono generati dai baricentri di simplessi di K, che siano totalmente ordinati rispetto all'inclusione.

La maglia di un complesso K, $\operatorname{mesh} K$, è definita come il $\sup\limits_{s\in K}\{\operatorname{diam} s\}$.

Teorema 2.2 (Teorema di approssimazione simpliciale) – Siano dati due complessi finiti K ed L, e una mappa $f: |K| \longrightarrow |L|$. Allora esiste un $N \in \mathbb{N}^0$ tale che, per $n>N$, vi sono approssimazioni simpliciali $\operatorname{sd}^n K \longrightarrow L$ di f.

Dimostrazione – $\mathcal{R} = \{f^{-1}(\operatorname{int}|st(w,L)|) \mid w \text{ vertice di } L\}$ costituisce un ricoprimento aperto dello spazio metrico compatto $|K|$. Allora esiste un $\delta>0$ (numero di Lebesgue di $\mathcal{R}$) tale che ogni sottoinsieme di $|K|$ di diametro $<\delta$ è contenuto in un insieme di $\mathcal{R}$. Osservando che, per un complesso finito m-dimensionale H,

$$\operatorname{mesh} \operatorname{sd} H \le \frac{m}{m+1} \operatorname{mesh} H \;,$$

si deduce che esiste un $N \in \mathbb{N}^0$ tale che, per $n>N$, si ha mesh $sd^n K < \frac{\delta}{2}$. Allora, in $sd^n K$, per ogni vertice $v \in sd^n K$ esiste almeno un vertice $w \in L$ per cui $f(|st(v, sd^n K)|) \subset \operatorname{int} |st(w, L)|$; si scelga un tale vertice $\overline{w}$ di L e si ponga $\overline{g}(v) = \overline{w}$.

Se $s = \langle v^0, \dots, v^k \rangle \in sd^n K$, si ha $\bigcap_{i \in \mathbb{N}_k^0} \operatorname{int} |st(\overline{g}(v^i), L)| \neq \emptyset$, perciò i $\overline{g}(v^i)$ $(i \in \mathbb{N}_k^0)$ appartengono ad uno stesso simplesso di L; $\overline{g}$ genera dunque un'applicazione simpliciale $g : sd^n K \to L$ che per costruzione è approssimazione simpliciale di f. $\square$