

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici, ...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

1) Quali delle seguenti sono quadriche non degeneri iperboliche (o doppiamente rigate)?

- F V** a)  $x^2 - 3y^2 = 1$   
**F V** b)  $5x^2 - 3y^2 - 2z^2 = -1$   
**F V** c)  $5x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 1$   
**F V** d)  $5x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 1$

1') Quali delle seguenti sono quadriche non degeneri ellittiche (o non rigate)?

- F V** a)  $x^2 - 3y^2 = 1$   
**F V** b)  $5x^2 - 3y^2 - 2z^2 = -1$   
**F V** c)  $5x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 1$   
**F V** d)  $5x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 1$

2) Quali dei seguenti sottospazi euclidei di  $\mathcal{E}^3$  sono rette parallele all'asse  $y$ ?

- F V** a)  $\begin{cases} x = 5 \\ y = \alpha + \beta \\ z = 5 \end{cases}$   
**F V** b)  $\begin{cases} x = \alpha + 5 \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + 5 \end{cases}$   
**F V** c)  $y = 5$   
**F V** d)  $\begin{cases} x + z = 5 \\ x - z = 5 \end{cases}$

2') Quali dei seguenti sottospazi euclidei di  $\mathcal{E}^3$  sono piani paralleli all'asse  $y$ ?

- F V** a)  $\begin{cases} x = 5 \\ y = \alpha + \beta \\ z = 5 \end{cases}$   
**F V** b)  $\begin{cases} x = \alpha + 5 \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + 5 \end{cases}$   
**F V** c)  $y = 5$   
**F V** d)  $\begin{cases} x + z = 5 \\ x - z = 5 \end{cases}$

3) Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

$$\mathbf{F} \quad \mathbf{V} \quad \text{a) } T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ A & \mapsto & {}^t A \end{array}$$

$$\mathbf{F} \quad \mathbf{V} \quad \text{b) } T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \rightarrow & \mathbf{R} \\ A & \mapsto & \det A \end{array}$$

$$\mathbf{F} \quad \mathbf{V} \quad \text{c) } T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \rightarrow & \mathbf{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & a + b + c + d \end{array}$$

$$\mathbf{F} \quad \mathbf{V} \quad \text{d) } T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \rightarrow & \mathbf{R}^5 \\ A & \mapsto & (0, 0, 0, 0, 0) \end{array}$$

3') Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

$$\mathbf{F} \quad \mathbf{V} \quad \text{a) } T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ A & \mapsto & {}^t A \end{array}$$

$$\mathbf{F} \quad \mathbf{V} \quad \text{b) } T : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \rightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto & \det \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{F} \quad \mathbf{V} \quad \text{c) } T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \rightarrow & \mathbf{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & abcd \end{array}$$

$$\mathbf{F} \quad \mathbf{V} \quad \text{d) } T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \rightarrow & \mathbf{R}^5 \\ A & \mapsto & (0, 0, 0, 0, 0) \end{array}$$

4) L'Enterprise ha trovato la misteriosa zona XYX dello spazio, di cui il Dottor Spock ha scoperto una proprietà: se si lancia un proiettile con vettore velocità  $v$  verso questa zona, il proiettile ne esce con vettore velocità  $T(v)$ , non nullo, dove la trasformazione  $T$  è lineare ed è rappresentata, rispetto ad una certa base ordinata  $\mathcal{B}$ , dalla matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ . Allora necessariamente

$\mathbf{F} \quad \mathbf{V}$  a)  $A$  è diagonalizzabile per similitudine.

$\mathbf{F} \quad \mathbf{V}$  b)  $A$  è la matrice identica  $I_3$ .

$\mathbf{F} \quad \mathbf{V}$  c) ci sono proiettili che escono dalla zona XYX lungo la stessa direzione con cui vi sono entrati.

$\mathbf{F} \quad \mathbf{V}$  d)  $T$  non ha l'autovalore 0.

4') L'Enterprise ha trovato la misteriosa zona XYX dello spazio, di cui il Dottor Spock ha scoperto una proprietà: se si lancia un proiettile con vettore velocità  $v$  verso questa zona, il proiettile rimbalza all'indietro verso il punto di lancio con vettore velocità  $T(v)$  di modulo quadruplo rispetto a  $v$ . Allora

$\mathbf{F} \quad \mathbf{V}$  a)  $T$  è lineare e non ha autovalori.

$\mathbf{F} \quad \mathbf{V}$  b)  $T$  è lineare e, rispetto a una certa base ordinata  $\mathcal{B}$  è rappresentata dalla matrice identica  $I_3$ .

$\mathbf{F} \quad \mathbf{V}$  c)  $T$  è lineare e ha il solo autovalore 4 di molteplicità geometrica 1.

$\mathbf{F} \quad \mathbf{V}$  d)  $T$  è lineare e ha il solo autovalore -4 di molteplicità geometrica 3.

5) Quali delle seguenti applicazioni  $f$  da  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$  a se stesso sono omomorfismi dal gruppo  $(\mathbf{R}^*, \cdot)$  a se stesso?

- F V** a)  $f(x) = 2 \cdot x$   
**F V** b)  $f(x) = 2 + x$   
**F V** c)  $f(x) = x^2$   
**F V** d)  $f(x) = -x$

5') Quali delle seguenti applicazioni  $f$  da  $\mathbf{R}$  a se stesso sono omomorfismi dal gruppo  $(\mathbf{R}, +)$  a se stesso?

- F V** a)  $f(x) = 2 \cdot x$   
**F V** b)  $f(x) = 2 + x$   
**F V** c)  $f(x) = x^2$   
**F V** d)  $f(x) = -x$

6) Sia  $A \in \mathcal{M}_6(\mathbf{R})$ . Sia  $B$  la matrice ottenuta da  $A$  scambiando la riga  $i$  con la riga  $7 - i$  per  $i = 1, 2, 3$ .

- F V** a)  $\det(B) = \det A$   
**F V** b)  $\det(B) = 0$   
**F V** c)  $\det(B) = 1/\det A$   
**F V** d)  $\det(B) = -\det A$

6') Sia  $A \in \mathcal{M}_8(\mathbf{R})$ . Sia  $B$  la matrice ottenuta da  $A$  scambiando la riga  $i$  con la riga  $9 - i$  per  $i = 1, 2, 3, 4$ .

- F V** a)  $\det(B) = \det A$   
**F V** b)  $\det(B) = 0$   
**F V** c)  $\det(B) = 1/\det A$   
**F V** d)  $\det(B) = -\det A$

7) In uno spazio vettoriale  $V$  sia data la base ordinata  $\mathcal{B} = (u, v, w)$ . Allora anche  $\mathcal{B}' = (u, u + v, u + v + w)$  è una base ordinata. Rispetto a  $\mathcal{B}'$  il vettore  $v$  ha componenti

- F V** a)  $(0, 1, 0)$   
**F V** b)  $(-1, 1)$   
**F V** c)  $(0, 1, -1)$   
**F V** d)  $(-1, 1, 0)$

7') In uno spazio vettoriale  $V$  sia data la base ordinata  $\mathcal{B} = (u, v, w)$ . Allora anche  $\mathcal{B}' = (u + v + w, v + w, w)$  è una base ordinata. Rispetto a  $\mathcal{B}'$  il vettore  $v$  ha componenti

- F V** a)  $(0, 1, 0)$   
**F V** b)  $(1, -1)$   
**F V** c)  $(0, 1, -1)$   
**F V** d)  $(-1, 1, 0)$

8) In uno spazio vettoriale euclideo  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sia  $\mathcal{B} = (u, v)$ , dove  $u$  e  $v$  hanno norma euclidea  $\sqrt{3}$  e prodotto scalare  $\langle u, v \rangle = 0$ . Se  $w \equiv_{\mathcal{B}} (\alpha_1, \alpha_2)$  e  $w' \equiv_{\mathcal{B}} (\beta_1, \beta_2)$ , allora  $\langle w, w' \rangle =$

- F V** a)  $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$   
**F V** b)  $3\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$   
**F V** c)  $3\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$   
**F V** d)  $3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1$

8') In uno spazio vettoriale euclideo  $(V, \langle, \rangle)$  sia  $\mathcal{B} = (u, v)$ , dove  $u$  e  $v$  hanno norma euclidea  $\sqrt{3}$  e prodotto scalare  $\langle u, v \rangle = 2$ . Se  $w \equiv_{\mathcal{B}} (\alpha_1, \alpha_2)$  e  $w' \equiv_{\mathcal{B}} (\beta_1, \beta_2)$ , allora  $\langle w, w' \rangle =$

- F   V**   a)  $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$   
**F   V**   b)  $3\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$   
**F   V**   c)  $3\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$   
**F   V**   d)  $2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1$

9) Per quali degli endomorfismi di  $\mathbf{R}^3$  canonicamente rappresentati dalle seguenti matrici esistono basi spettrali?

- F   V**   a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$   
**F   V**   b)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$   
**F   V**   c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$   
**F   V**   d)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9') Per quali degli endomorfismi di  $\mathbf{R}^3$  canonicamente rappresentati dalle seguenti matrici esistono basi spettrali?

- F   V**   a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$   
**F   V**   b)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$   
**F   V**   c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$   
**F   V**   d)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$