

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici, ...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

1) Quali delle seguenti sono quadriche non degeneri iperboliche (o doppiamente rigate)?

- F V** a) $x^2 - 3y^2 = 1$
F V b) $5x^2 - 3y^2 - 2z^2 = -1$
F V c) $5x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 1$
F V d) $5x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 1$

1') Quali delle seguenti sono quadriche non degeneri ellittiche (o non rigate)?

- F V** a) $x^2 - 3y^2 = 1$
F V b) $5x^2 - 3y^2 - 2z^2 = -1$
F V c) $5x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 1$
F V d) $5x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 1$

2) Quali dei seguenti sottospazi euclidei di \mathcal{E}^3 sono rette parallele all'asse y ?

- F V** a) $\begin{cases} x = 5 \\ y = \alpha + \beta \\ z = 5 \end{cases}$
F V b) $\begin{cases} x = \alpha + 5 \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + 5 \end{cases}$
F V c) $y = 5$
F V d) $\begin{cases} x + z = 5 \\ x - z = 5 \end{cases}$

2') Quali dei seguenti sottospazi euclidei di \mathcal{E}^3 sono piani paralleli all'asse y ?

- F V** a) $\begin{cases} x = 5 \\ y = \alpha + \beta \\ z = 5 \end{cases}$
F V b) $\begin{cases} x = \alpha + 5 \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + 5 \end{cases}$
F V c) $y = 5$
F V d) $\begin{cases} x + z = 5 \\ x - z = 5 \end{cases}$

3) Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

F V a) $T: \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$
 $A \mapsto {}^tA$

F V b) $T: \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$
 $A \mapsto \det A$

F V c) $T: \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + b + c + d$

F V d) $T: \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^5$
 $A \mapsto (0, 0, 0, 0, 0)$

3') Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

F V a) $T: \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$
 $A \mapsto {}^tA$

F V b) $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$
 $(x, y) \mapsto \det \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

F V c) $T: \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto abcd$

F V d) $T: \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^5$
 $A \mapsto (0, 0, 0, 0, 0)$

4) L'Enterprise ha trovato la misteriosa zona XYX dello spazio, di cui il Dottor Spock ha scoperto una proprietà: se si lancia un proiettile con vettore velocità v verso questa zona, il proiettile ne esce con vettore velocità $T(v)$, non nullo, dove la trasformazione T è lineare ed è rappresentata, rispetto ad una certa base ordinata \mathcal{B} , dalla matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Allora necessariamente

F V a) A è diagonalizzabile per similitudine.

F V b) A è la matrice identica I_3 .

F V c) ci sono proiettili che escono dalla zona XYX lungo la stessa direzione con cui vi sono entrati.

F V d) T non ha l'autovalore 0.

4') L'Enterprise ha trovato la misteriosa zona XYX dello spazio, di cui il Dottor Spock ha scoperto una proprietà: se si lancia un proiettile con vettore velocità v verso questa zona, il proiettile rimbalza all'indietro verso il punto di lancio con vettore velocità $T(v)$ di modulo quadruplo rispetto a v . Allora

F V a) T è lineare e non ha autovalori.

F V b) T è lineare e, rispetto a una certa base ordinata \mathcal{B} è rappresentata dalla matrice identica I_3 .

F V c) T è lineare e ha il solo autovalore 4 di molteplicità geometrica 1.

F V d) T è lineare e ha il solo autovalore -4 di molteplicità geometrica 3.

5) Quali delle seguenti applicazioni f da $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ a se stesso sono omomorfismi dal gruppo (\mathbf{R}^*, \cdot) a se stesso?

- F V** a) $f(x) = 2 \cdot x$
F V b) $f(x) = 2 + x$
F V c) $f(x) = x^2$
F V d) $f(x) = -x$

5') Quali delle seguenti applicazioni f da \mathbf{R} a se stesso sono omomorfismi dal gruppo $(\mathbf{R}, +)$ a se stesso?

- F V** a) $f(x) = 2 \cdot x$
F V b) $f(x) = 2 + x$
F V c) $f(x) = x^2$
F V d) $f(x) = -x$

6) Sia $A \in \mathcal{M}_6(\mathbf{R})$. Sia B la matrice ottenuta da A scambiando la riga i con la riga $7 - i$ per $i = 1, 2, 3$.

- F V** a) $\det(B) = \det A$
F V b) $\det(B) = 0$
F V c) $\det(B) = 1/\det A$
F V d) $\det(B) = -\det A$

6') Sia $A \in \mathcal{M}_8(\mathbf{R})$. Sia B la matrice ottenuta da A scambiando la riga i con la riga $9 - i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

- F V** a) $\det(B) = \det A$
F V b) $\det(B) = 0$
F V c) $\det(B) = 1/\det A$
F V d) $\det(B) = -\det A$

7) In uno spazio vettoriale V sia data la base ordinata $\mathcal{B} = (u, v, w)$. Allora anche $\mathcal{B}' = (u, u + v, u + v + w)$ è una base ordinata. Rispetto a \mathcal{B}' il vettore v ha componenti

- F V** a) $(0, 1, 0)$
F V b) $(-1, 1)$
F V c) $(0, 1, -1)$
F V d) $(-1, 1, 0)$

7') In uno spazio vettoriale V sia data la base ordinata $\mathcal{B} = (u, v, w)$. Allora anche $\mathcal{B}' = (u + v + w, v + w, w)$ è una base ordinata. Rispetto a \mathcal{B}' il vettore v ha componenti

- F V** a) $(0, 1, 0)$
F V b) $(1, -1)$
F V c) $(0, 1, -1)$
F V d) $(-1, 1, 0)$

8) In uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sia $\mathcal{B} = (u, v)$, dove u e v hanno norma euclidea $\sqrt{3}$ e prodotto scalare $\langle u, v \rangle = 0$. Se $w \equiv_{\mathcal{B}} (\alpha_1, \alpha_2)$ e $w' \equiv_{\mathcal{B}} (\beta_1, \beta_2)$, allora $\langle w, w' \rangle =$

- F V** a) $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$
F V b) $3\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$
F V c) $3\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$
F V d) $3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1$

8') In uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sia $\mathcal{B} = (u, v)$, dove u e v hanno norma euclidea $\sqrt{3}$ e prodotto scalare $\langle u, v \rangle = 2$. Se $w \equiv_{\mathcal{B}} (\alpha_1, \alpha_2)$ e $w' \equiv_{\mathcal{B}} (\beta_1, \beta_2)$, allora $\langle w, w' \rangle =$

- F V** a) $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$
F V b) $3\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$
F V c) $3\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$
F V d) $2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1$

9) Per quali degli endomorfismi di \mathbf{R}^3 canonicamente rappresentati dalle seguenti matrici esistono basi spettrali?

- F V** a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
F V b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
F V c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
F V d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9') Per quali degli endomorfismi di \mathbf{R}^3 canonicamente rappresentati dalle seguenti matrici esistono basi spettrali?

- F V** a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
F V b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
F V c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
F V d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$