

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici, ...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

1) Siano $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, con B ottenuta da A moltiplicando per 5 tutti i suoi elementi. Allora

- F V** a) $\det B = 243 \cdot \det A$.
F V b) $\det B = 5 \cdot \det A$.
F V c) $\det B = 15 \cdot \det A$.
F V d) $\det B = 125 \cdot \det A$.

1') Siano $A, B \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$, con B ottenuta da A moltiplicando per 3 tutti i suoi elementi. Allora

- F V** a) $\det B = 243 \cdot \det A$.
F V b) $\det B = 3 \cdot \det A$.
F V c) $\det B = 15 \cdot \det A$.
F V d) $\det B = 125 \cdot \det A$.

2) Sia $X = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$, Allora $(X, +, \cdot)$, dove le operazioni sono la somma e il prodotto riga per colonna,

- F V** a) è un anello con divisori dello zero.
F V b) è un campo.
F V c) non è un anello.
F V d) è un anello commutativo.

2') Sia $X = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}) \mid a \in \mathbf{R} \right\}$, Allora $(X, +, \cdot)$, dove le operazioni sono somma e prodotto riga per colonna,

- F V** a) è un anello con divisori dello zero.
F V b) è un campo.
F V c) non è un anello.
F V d) è un anello commutativo.

3) Sia V lo spazio vettoriale delle successioni reali. Sia T l'endomorfismo di V tale che, per ogni $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $T((a_n)_{n \in \mathbf{N}}) = (b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in cui $\forall n \in \mathbf{N} \quad b_n = a_1$. Allora

- F V** a) T non ha autovalori.
F V b) 0 è l'unico autovalore di T .
F V c) 1 è un autovalore di T .
F V d) ogni numero reale è autovalore di T .

3') Sia V lo spazio vettoriale delle successioni reali. Sia T l'endomorfismo di V tale che, per ogni $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $T((a_n)_{n \in \mathbf{N}}) = (b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in cui $\forall n \in \mathbf{N} \quad b_n = a_1$. Allora

- F V** a) T non ha autovalori.
F V b) 0 è un autovalore di T .
F V c) 1 è l'unico autovalore di T .
F V d) ogni numero reale è autovalore di T .

- 4) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 7 e siano U, W suoi sottospazi vettoriali, con $\dim U = 4$, $\dim W = 3$ e $U + W = V$. Allora

- F V** a) $\dim(U \cap W) = 1$.
F V b) $\dim(U \cap W) = 0$.
F V c) per ogni vettore $v \in V$ esistono un unico $u \in U$ e un unico $w \in W$ tali che $v = u + w$.
F V d) per ogni vettore $v \in V$ esistono infiniti $u \in U$ e infiniti $w \in W$ tali che $v = u + w$.

- 4') Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e siano U, W suoi sottospazi vettoriali, con $\dim U = 4$, $\dim W = 3$ e $U + W = V$. Allora

- F V** a) $\dim(U \cap W) = 1$.
F V b) $\dim(U \cap W) = 0$.
F V c) per ogni vettore $v \in V$ esistono un unico $u \in U$ e un unico $w \in W$ tali che $v = u + w$.
F V d) per ogni vettore $v \in V$ esistono infiniti $u \in U$ e infiniti $w \in W$ tali che $v = u + w$.

- 5) Dato uno spazio vettoriale euclideo (V, \langle, \rangle) , sia $\| \cdot \|$ la norma euclidea indotta dal prodotto scalare. Allora

- F V** a) $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall v \in V \quad \|\alpha v\| = \alpha \|v\|$
F V b) $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall v \in V \quad \|\alpha v\| = \alpha^2 \|v\|$
F V c) $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| = \|u\| + \|v\|$
F V d) $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

- 5') Dato uno spazio vettoriale euclideo (V, \langle, \rangle) , sia $\| \cdot \|$ la norma euclidea indotta dal prodotto scalare. Allora

- F V** a) $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall v \in V \quad \|\alpha v\| = \alpha \|v\|$
F V b) $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall v \in V \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
F V c) $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| = \|u\| + \|v\|$
F V d) $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$

- 6) Quali delle seguenti quadriche hanno immagine vuota?

- F V** a) $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$
F V b) $x^2 + y^2 = 1$
F V c) $-x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$
F V d) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

- 6') Quali delle seguenti quadriche hanno immagine **non** vuota?

- F V** a) $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$
F V b) $x^2 + y^2 = 1$
F V c) $-x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$
F V d) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

- 7) In un piano \mathcal{E}^2 , rispetto a un riferimento cartesiano, l'equazione $x = 42$ rappresenta

- F V** a) un punto.
F V b) una retta ortogonale all'asse x .
F V c) tutto il piano.
F V d) una retta ortogonale all'asse y .

7') In uno spazio \mathcal{E}^3 , rispetto a un riferimento cartesiano, l'equazione $x = 42$ rappresenta

- F V** a) un punto.
- F V** b) una retta ortogonale all'asse x .
- F V** c) un piano ortogonale all'asse x .
- F V** d) un piano ortogonale all'asse y .

8) Dato lo spazio vettoriale V di tutte le funzioni da $[0, 1]$ ad \mathbf{R} , si dica quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

- F V** a) $T : V \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\forall f \in V \quad T(f) = \max\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$
- F V** b) $T : V \rightarrow V$ tale che $\forall f \in V \quad T(f) = g$ dove $\forall x \in [0, 1] \quad g(x) = 5f(x)$
- F V** c) $T : V \rightarrow V$ tale che $\forall f \in V \quad T(f) = h$ dove $\forall x \in [0, 1] \quad h(x) = 1$
- F V** d) $T : V \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\forall f \in V \quad T(f) = f(1)$

8') Dato lo spazio vettoriale V di tutte le funzioni da $[0, 1]$ ad \mathbf{R} , si dica quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

- F V** a) $T : V \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\forall f \in V \quad T(f) = \max\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$
- F V** b) $T : V \rightarrow V$ tale che $\forall f \in V \quad T(f) = g$ dove $\forall x \in [0, 1] \quad g(x) = 5 + f(x)$
- F V** c) $T : V \rightarrow V$ tale che $\forall f \in V \quad T(f) = h$ dove $\forall x \in [0, 1] \quad h(x) = 0$
- F V** d) $T : V \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\forall f \in V \quad T(f) = f(0)$

9) Sia $\mathbf{S} = (A, b)$ un sistema lineare non omogeneo. Sia $\mathbf{S}_o = (A, 0)$ il sistema lineare omogeneo associato. Allora

- F V** a) se \mathbf{S} ammette almeno una soluzione, \mathbf{S}_o ammette soluzioni diverse dalla ovvia.
- F V** b) se \mathbf{S}_o ammette soluzioni diverse dalla ovvia, \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.
- F V** c) se $\text{Sol}\mathbf{S}$ non è vuoto, i suoi elementi sono dati dalla somma degli elementi di $\text{Sol}\mathbf{S}_o$ con una qualunque soluzione fissata di \mathbf{S} .
- F V** d) se \mathbf{S} è impossibile, \mathbf{S}_o ha solo la soluzione ovvia.

9') Sia $\mathbf{S} = (A, b)$ un sistema lineare non omogeneo. Sia $\mathbf{S}_o = (A, 0)$ il sistema lineare omogeneo associato. Allora

- F V** a) se \mathbf{S} ammette almeno due soluzioni, \mathbf{S}_o ammette soluzioni diverse dalla ovvia.
- F V** b) se \mathbf{S}_o ammette soluzioni diverse dalla ovvia, \mathbf{S} ammette almeno una soluzione.
- F V** c) se $\text{Sol}\mathbf{S}$ non è vuoto, i suoi elementi sono dati dalla somma degli elementi di $\text{Sol}\mathbf{S}_o$ con la colonna b dei termini noti.
- F V** d) se \mathbf{S} è impossibile, \mathbf{S}_o ha solo la soluzione ovvia.