---

1) Detto $\mathcal{F}$ il fascio di coniche a centro aventi per asse la retta r di equazione $2x + y - 2 = 0$ ed aventi un vertice nell'origine,

   a) se ne scriva l'equazione.

   b) Si trovi la conica di $\mathcal{F}$ rispetto alla quale risultano coniugati i punti Y_∞ ed $A \equiv (0, 1)$.

---

2) Detta $\mathcal{P}$ la parabola tale che i) $V \equiv (0, 1)$ è vertice, ii) la retta d di equazione $y = 2x - 2$ è un diametro, iii) d è il diametro coniugato alla direzione dell'asse coordinato x,

   a) se ne trovi l'equazione.

   b) Si determini l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di coniche aventi centro proprio di ordinata nulla e per cui valgano le condizioni i), ii) precedenti.

   c) Si determini l'iperbole $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{F}$ avente un asintoto parallelo all'asse coordinato y.

   d) Si trovino gli asintoti di $\mathcal{Q}$.

---

3) Date le rette d_1, d_2 di equazioni $x + 2y - 6 = 0,\ 2x - y = 0$,

   a) si scriva l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di iperboli aventi d_1, d_2 come asintoti.

   b) Si trovi la conica $\mathcal{Q}$, del fascio $\mathcal{F}$, tangente alla retta di equazione $y = x$.

   c) Si trovino centro ed assi di $\mathcal{Q}$.

---

4) Date le curve $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ di equazioni $y = x^2, \quad y = -x^3$, si trovino

   a) l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ dei punti d'intersezione delle tangenti condotte a $\mathcal{C}$ ed a $\mathcal{C}'$ in punti di uguale ascissa;

   b) le coordinate dei punti impropri di $\mathcal{L}$;

   c) le coordinate dei punti di intersezione di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.

---

5) Data la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = u^3 - 6u^2 \\ y = 3u \\ z = u - 1 \end{cases}$

   a) si dimostri che essa è algebrica e se ne determini l'ordine;

   b) si verifichi che è piana e si scriva l'equazione del piano che la contiene;

   c) si scriva l'equazione cartesiana del luogo delle tangenti alla curva $\mathcal{C}$ e fra tali tangenti si determinino quelle ortogonali alla retta di equazioni $\begin{cases} y = 3 \\ z = 9x. \end{cases}$

---

6) Data la superficie Σ di equazioni $\begin{cases} x = u^2 - uv \\ y = v \\ z = u - v^2 \end{cases}$

   a) se ne trovi l'equazione cartesiana.

   b) Scelto un punto semplice ordinario P di Σ, si determinino, mediante la nozione di contatto, le tangenti asintotiche a Σ in P.

   c) Si scrivano equazioni parametriche ordinarie della curva luogo dei punti di Σ in cui la normale a Σ è parallela al piano di equazione $2x + z = 0$ e si verifichi che tale curva è piana.

---

7) Data la famiglia di coniche $\mathcal{F}$ di equazione $x^2 + y^2 + 2\lambda xy + 4\lambda^2 x + 4 = 0$

   a) si scriva l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ descritto dal polo dell'asse coordinato x rispetto alle coniche di $\mathcal{F}$.

   b) Si determinino i punti multipli propri di $\mathcal{L}$.

---

8) Data la curva $\mathcal{C}$ di equazione $y = x^3 - 3x$, sia n la normale a $\mathcal{C}$ in un suo punto generico P. Determinare:

   a) l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ descritto dai punti medi delle intersezioni, diverse da P, di $\mathcal{C}$ ed n;

   b) le coordinate del punto improprio R_∞ di $\mathcal{L}$ e la molteplicità di R_∞ come punto di $\mathcal{L}$.

---

9) Data la curva $\mathcal{C}$ di equazione $y = 1/x$,

   a) si trovino le circonferenze osculatrici a $\mathcal{C}$ nei punti di coordinate $(2, 1/2), (1, 1)$;

   b) si determini l'ordine di contatto con $\mathcal{C}$ di tali circonferenze.

---

10) Data la curva $\mathcal{C}$ di equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ y = x^2, \end{cases}$

   a) si scrivano le equazioni cartesiane delle quattro superfici di rotazione ottenute facendo ruotare $\mathcal{C}$ rispettivamente attorno ad ognuno degli assi coordinati ed attorno alla retta r di equazione $\begin{cases} x = z \\ y = 0. \end{cases}$

   b) Si scriva l'equazione del cono avente $\mathcal{C}$ come direttrice e vertice $V \equiv (0, 0, 1)$.

   c) Si scriva l'equazione del cilindro avente $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici parallele alla retta di equazioni $\begin{cases} x = 2y \\ z = y - 1. \end{cases}$

---

11) Data la curva $\mathcal{C}$ di equazione $4x^2y - y^3 + 6xy - 8y + 1 = 0$ se ne determinino gli asintoti.

---

12) Data la superficie Σ di equazione $x^4 - y^2 - z^2 = 0$ si trovi il piano tangente a Σ nel punto di coordinate $(3, 9, 0)$.

---

13) Data la curva $\mathcal{C}$ di equazione $y = x^2$, si scriva l'equazione della podaria $\mathcal{P}$ di $\mathcal{C}$ da $A \equiv (3, 0)$, cioè del luogo dei punti di intersezione delle tangenti a $\mathcal{C}$ con le normali ad esse condotte da A.

---

14) Data la superficie Σ di equazione $x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 14x^2 - 14y^2 - 10z^2 + 25 = 0$

   a) se ne trovino i punti multipli.

   b) Si scriva l'equazione cartesiana del cono tangente a Σ in uno dei suoi punti multipli.

---

15) Si scriva l'equazione del fascio di iperboli passanti per $P \equiv (2, 0)$, aventi r di equazione $y = x$ come asintoto, e l'altro asintoto parallelo all'asse coordinato x.

---

16) Si classifichino le quadriche del fascio $\mathcal{F}$ di equazione

$$(3\lambda - 1)x^2 + (1 - \lambda)y^2 + 2\lambda xz + 2z - 4\lambda = 0.$$

---

17) Date le rette $r,\ s$ di equazioni $y = 0, \quad y = 2x$ e la conica Γ di equazione $2xy - y^2 - 2x + 3y + 4 = 0$,

a) si scriva l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per i punti di intersezione di Γ con r e con s.

b) Si trovino i punti base e si classifichino le coniche di $\mathcal{F}$.

c) Scelta ad arbitrio un'iperbole di $\mathcal{F}$, se ne trovino gli asintoti e gli assi.

---

18) Data l'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione $5x^2 + 5y^2 + 6xy + 10x + 6y - 11 = 0$,

a) si scriva l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per i vertici di $\mathcal{E}$.

b) Si classifichino le coniche di $\mathcal{F}$.

c) Si trovi la conica di $\mathcal{F}$ rispetto alla quale il diametro coniugato alla direzione della retta r di equazione $x - y = 0$ è parallelo alla retta s di equazione $5x + 3y = 0$.

---

19) Dato il fascio $\mathcal{F}$ di quadriche di equazione

$$(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 1)y^2 + (\lambda + 1)z^2 + 4(\lambda - 1)x - 2(\lambda - 1)y + 4\lambda - 5 = 0$$

a) si classifichino le quadriche di $\mathcal{F}$.

b) Detta $\mathcal{Q}$ la quadrica di $\mathcal{F}$ ottenuta per $\lambda = 2$, si determini, in forma cartesiana, la curva $\mathcal{C}$ luogo dei punti P di $\mathcal{Q}$ tali che la normale a $\mathcal{Q}$ in P sia parallela al piano coordinato xy.

---

20) Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza passante per $A \equiv (2, 0, 0)$ e tangente in $B \equiv (1, 0, -1)$ alla retta di equazioni $\begin{cases} z = -1 \\ y = 0. \end{cases}$ Si scriva l'equazione cartesiana della superficie Σ ottenuta facendo ruotare Σ attorno all'asse coordinato z.

---

21) Sia $\mathcal{F}$ il fascio di parabole aventi il vertice in $V \equiv (-1, 0)$ e per asse la retta di equazione $y = 0$.

a) Si scriva l'equazione di $\mathcal{F}$.

b) Siano i) $\mathcal{P}$ la generica parabola di $\mathcal{F}$, ii) A il punto di intersezione di $\mathcal{P}$ con la retta di equazione $y = 1$, iii) $B_1,\ B_2$ le intersezioni di $\mathcal{P}$ con l'asse coordinato y. Si scriva l'equazione cartesiana della curva $\mathcal{C}$, luogo dei punti medi dei segmenti $AB_1,\ AB_2$ al variare di $\mathcal{P}$ nel fascio $\mathcal{F}$.

c) Si verifichi che l'origine del riferimento è un punto semplice di $\mathcal{C}$.

d) Si scrivano le coordinate dei punti impropri di $\mathcal{C}$.

---

22) Data la superficie Σ di equazione $x^3 - 2y^2 - 2z - 4x + 4 = 0$,

a) determinare, mediante la nozione di contatto, l'equazione del piano Π tangente a Σ in $P \equiv (2, 0, 2)$ e le tangenti asintotiche in P.

b) Determinare la curva $\mathcal{C}'$ proiezione ortogonale, sul piano coordinato xy, della curva $\mathcal{C}$ intersezione di Σ con Π.

c) Verificare che la curva $\mathcal{C}'$ ha un punto doppio nel punto P' proiezione ortogonale di P sul piano xy.

---

23) Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di circonferenze reali aventi centro sulla curva $\mathcal{P}$ di equazione $y = 2x^2$ e tangenti all'asse coordinato x. Detta $\mathcal{C}$ la generica circonferenza di $\mathcal{F}$, siano r_1 ed r_2 le tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi punti di intersezione con l'asse coordinato y.

a) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ descritto dal punto di intersezione di r_1 ed r_2 al variare di $\mathcal{C}$ in $\mathcal{F}$.

b) Considerando $\mathcal{L}$ giacente sul piano di equazione $z = 0$ dello spazio ordinario, si determini l'equazione cartesiana del cono avente $\mathcal{L}$ come direttice e vertice $V \equiv (0, 0, 1)$.

---

24) Sia P il punto generico della retta r di equazione $x - y = 0$. Detta $\mathcal{C}_P$ l'iperbole tangente ad r in P, avente gli asintoti paralleli agli assi coordinati x ed y e passante per $A \equiv (-1, 1)$, sia B_P il centro di $\mathcal{C}_P$.

a) Si determini l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ descritto da B_P al variare da P su r.

b) Si verifichi che $\mathcal{L}$ è una parabola e se ne trovino asse e vertice.

---

25)

a) Si determini l'equazione cartesiana della quadrica $\mathcal{Q}$ ottenuta facendo ruotare la retta r di equazioni $\begin{cases} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + 4y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$ attorno alla retta s di equazioni $\begin{cases} y = -1 \\ z = 2x \end{cases}$ (sghemba con r).

b) Si scelga un punto P della retta r e si determini l'equazione del piano tangente a $\mathcal{Q}$ in P.

c) Si dica, senza eseguire alcun calcolo, perché i punti di $\mathcal{Q}$ devono essere iperbolici.

---

26) Data la superficie Σ di equazione $x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 10x^2 - 10y^2 + 6z^2 + 9 = 0$

a) si scrivano le equazioni cartesiane dei piani tangenti a Σ in $A \equiv (3, 0, 0)$, $B \equiv (1, 0, 0)$, $C \equiv (2, 0, 1)$.

b) Si trovino le tangenti asintotiche a Σ in A, B, C.
