ESERCIZI SULL'OMOLOGIA

1) Calcolare i gruppi di omologia relativa di $(\mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1}, \mathbf{S^1} \times \{\mathbf{1}\})$.

2) Sia M una n-varietà chiusa e orientata e sia $f : M \to \mathbf{S^n}$ (con un'orientazione arbitraria) una mappa non suriettiva. Dimostrare che $\deg(f) = 0$.

3) Trovare i gruppi di omologia dello spazio $S = \mathbf{S^2} \vee \mathbf{S^1} \vee \mathbf{S^1}$, detto anche "spazio del topo".

4) Sia $\approx$ la relazione di equivalenza su $\mathbf{S^2}$ che identifica $x \approx -x$, per ogni x appartenente all'equatore $\mathbf{S^1}$. Calcolare i gruppi di omologia dello spazio quoziente. Fare lo stesso per lo spazio ottenuto identificando in $\mathbf{S^3}$ i punti antipodali contenuti nella "sfera equatoriale" $\mathbf{S^2} \subset \mathbf{S^3}$.

5) Sia X il nastro di Möbius e sia A la circonferenza di bordo. Calcolare l'omologia relativa della coppia (X, A).

6) Sia $A = (\mathbf{S}^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times \mathbf{S}^1) \subset \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Dimostrare che $(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1)/A \cong \mathbf{S}^2$ e che la mappa quoziente $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \to (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1)/A$ induce un isomorfismo in H_2 e quindi non è nullomotopa. Al contrario dimostrare, usando i rivestimenti, che ogni mappa $\mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ è nullomotopa.